G. HAVAS KATALIN

FORMÁLIS LOGIKA

KOSSUTH KÖNYVKIADÓ
1973

ELŐSZÓ

A könyv a filozófiában már járatos olvasóhoz azokat a modern logikai ismereteket kívánja eljuttatni, amelyek nélkül ma már aligha lehetséges korszerű filozófiai műveltség. Számít továbbá azokra az olvasókra is, akik a matematikai logika kalkulusait már ismerik. A matematikai jellegű fejtegetésektől idegenkedőket nem fogja hátráltatni a továbbiak megértésében, ha — nehéznek érezve — kihagyják a II. fejezet 1.7., 2.5, 2.6, IV. fejezet 3.2, 3.3. V. fejezet pontjait. A filozófiai kérdésekben kezdő olvasónak pedig ajánlható, hogy hagyja ki az I. fejezet 3—6. pontjait és csak a könyv további részeinek elolvasása után térjen vissza ezekhez.

E helyen mondok köszönetet Kalmár László akadémikusnak és E. K. Vojsvillonak, a filozófiai tudományok doktorának értékes útmutatásaikért, számos formában megnyilvánuló segítségükért, valamint Földesi Tamásnak, a filozófiai tudományok doktorának és Hársing Lászlónak, a filozófiai tudományok kandidátusának lektori munkájukért. Szeretnék megemlékezni azokról a hallgatóimról, akik az elmúlt években részt vettek logika kurzusaimon az Eötvös Loránd Tudományegyetem Bölcsészettudományi Karán és a Marxizmus—leninizmus Esti Egyetem logikai speciálkollégiumain. A könyv anyaga részben oktatómunkám közben fejlődött, hallgatóim figyelme, érdeklődése, vitakészsége nyomán is érlelődött.

I. A LOGIKA TUDOMÁNYÁNAK TÁRGYA

1. MI A LOGIKA TÁRGYA?

A logika szó a görög „logos" szóból ered, melynek jelentése: gondolat, beszéd, szó. Ma a köznyelvben a logika szót különböző összefüggésekben más és más jelentéssel használjuk.

„Ezt mutatja a dolgok logikája." „Ide vezetett az események logikája." „Gondolkozz logikusan!" „A logika szabályainak ismerete minden ember számára hasznos." A fenti mondatok mindegyikében a „logika" kifejezés eltérő összefüggések megjelölésére szolgál. Különböztessük meg ezeket egymástól!

„A dolgok logikája", „az események logikája" szóösszetételekben a „logika" szó dolgok, jelenségek közötti szükségszerű kapcsolatok jelölésére szolgál.

A logikus gondolkodás vagy a gondolkodás logikája a gondolkodás azon törvényeinek összessége, amelyek alkalmasak a valóság logikájának tudati visszatükrözésére.[1]

A valóság tudati képe nem egyszerű tükörkép. A gondolkodás specifikus formában tükrözi vissza a valóságot. A dolgok logikájának gondolati reprodukálása aktív tudati tevékenység eredménye. A valóság megismeréséhez gondolati műveletek elvégzésére van szükség. E műveletek eredményeként jön létre az ismeret. Az ismeretek szerzésére irányuló tevékenység törvényei alkotják a gondolkodás logikáját. A gondolkodás logikáját szubjektív logikának is nevezik, amennyiben az emberi szubjektumban, a tudatban végbemenő folyamatok törvényszerűségeiről van szó. De maguk ezek a törvények nem az egyén szubjektumától, akaratától függenek.

A gondolkodás logikája a dolgok logikáját követi, és bár viszonylagos önállósága van, törvényeit, eszközeit végső soron a visszatükrözendő objektum határozza meg.

A „logika" kifejezést magának a logika tudományának a megjelölésére is használjuk. A *logika mint tudomány* azokat a gondolatformákat, gondolkodási műveleteket, törvényeket kutatja, amelyek alkalmasak arra, hogy a gondolkodás objektumairól információkat szerezzünk. A logika tudománya azokat a módszereket és szabályokat tanulmányozza, amelyek alapján megkülönböztethető egymástól a helyes és helytelen gondolkodás.

A logika tudománya a gondolkodással foglalkozik. Ehhez az állításhoz azonban néhány megjegyzést kell fűznünk.

1. A logika azokkal a gondolkodástörvényekkel foglalkozik, amelyek függetlenek az emberi akarattól, az egyes emberek pszichikai sajátosságaitól. A logika nem az egyén gondolkodását vizsgálja. A gondolkodást nem mint lelki folyamatot tanulmányozza. Nem vizsgálja a lelki életnek (pl. az érzelemnek, akaratnak stb.) a gondolkodásra gyakorolt hatását.

2. A logikai elemzések csak az olyan gondolkodáshoz kapcsolódnak, amely határozott célt tűz maga elé, amelyet a gondolkodás folyamatában el akar érni. A gondolkodás logikai oldala a problémát meglátó és megoldó gondolkodás, az új ismeretekre törekvő gondolkodás. Ennek alapvető módja fogalmak, ítéletek olyan összekapcsolása, hogy belőlük új ítéleteket kapjunk. Az ilyen gondolati munkának a törvényeivel foglalkozik a logika.

3. A logika nem foglalkozik annak leírásával, hogy mi megy végbe az ember fejében akkor, amikor gondolkodik. Hasonlattal élve: a logika éppen úgy nem nyújtja a gondolkodás *leírását*, mint ahogy a geometria nem adja (vagy pontosabban: a különböző geometriai rendszerek egyike sem adja) a párhuzamos tárgyak (pl. sínek) leírását. A logikai formák és törvények — amelyeket a logika vizsgál — a gondolkodás absztrakt modelljei, hasonlóan ahhoz, ahogy a párhuzamos, a kör, a kiterjedés nélküli pont, vastagság nélküli vonal — amelyekkel a geometria dolgozik — absztrakciók, s mint ilyenek, alkalmasak tárgyak bizonyos sajátosságainak megragadására.

4. A logika a lehetséges eljárásokat vizsgálja, a *lehetséges* helyes operációk felkutatása a célja. Ezek között — mint látni fogjuk — jó néhány olyan eljárás van, amelynek nincs megfelelője azzal, amit az ember alkalmaz, amikor az agyában kigondol valamit. Azonban ezeket is — mivel ismeretek szerzésére alkalmas eszközök — a logikai eljárások közé soroljuk.

Hasonló a helyzet itt, mint a számtani műveleteknél. Szorozni pl. különböző módszerekkel lehet. Ha meg akarjuk szorozni hatvankettőt huszonöttel, ezt különböző módon tehetjük. Elvégezhetjük a szorzást fejben vagy az írásbeli szorzás szabályai szerint, felcserélhetjük a tényezőket, kifejezhetjük a két számot a kettes számrendszerben és ezután szorzunk stb. Szorzási műveletek lesznek ezek mind, függetlenül attól, hogy ember vagy gép végzi el, hogy olyan eljárás, amelyet az ember naponta használ vagy olyan, amelyet még nem használtak, de alkalmas eljárás a szorzásra.

A *gondolat logikai formái* a fogalmak és az ítéletek. E formák gondolkodásunk építőkövei. A gondolkodás fogalmakkal és ítéletekkel végzett logikai műveletekből áll. A műveletek eredményeként ismét fogalmakat és ítéleteket kapunk. E műveleteknek szintén meghatározott logikai formájuk van. A gondolatformák a logikai műveletek formáival *a gondolkodás logikai formáit* alkotják. A műveletek logikai formáját az határozza meg, hogy mely gondolatformákból kiindulva milyen gondolatforma létrehozatalára vezetnek.

A logikai forma elválasztása a gondolati tartalomtól tudományos vizsgálat célját szolgáló absztrakció. A gondolkodásban logikai forma és tartalom csak együtt léteznek. A logikai formák az emberi gondolkodásban tartalomteljes formák.[2] A logika — vizsgálódásai érdekében — elvonatkoztat e formák tartalmától. Ez az elvonatkoztatás a különböző logikai rendszerekben — mint látni fogjuk — különböző mértékig történhet, de sohasem teljesen, minden vonatkozásban. A logikában nincs „tiszta forma", csak a tartalomtól ilyen vagy olyan mértékig absztrahált forma. A logika különböző fejezeteit (pl. kijelentések logikája, predikátumok logikája, modális logika stb.) az határolja el egymástól, hogy az absztrakció mely síkján és szintjén vizsgálja az egyes gondolatok logikai formáját és az ezeken a gondolatformákon felépülő logikai műveleteket.

A logikának egyetlen fejezete sem foglalkozik „a fogalom", „az ítélet" vagy valamely gondolkodási művelet valamennyi logikai sajátosságával. Mindegyik fejezete meghatározott típusú megközelítése, absztrakt modellje a gondolkodás valamely oldalát jellemző sajátosságoknak; az emberi gondolkodás logikáját egészében csak e fejezetek összessége, a logikatudomány végtelenül fejlődő épülete képes reprodukálni.

A logika központi kérdése a logikai műveletek helyességének vizsgálata. Logikailag helyesnek nevezzük az olyan műveletet, amely alkalmas eljárás a megismerés objektumáról információk, igaz ismeretek szerzésére.

A gondolkodás célja az, hogy igaz ismereteket szerezzünk. *Igaz ismeretnek* az olyan gondolatot nevezzük, amelynek tartalma megfelel a valóságnak, a valóságot hűen tükrözi vissza. Pl. „Ez a tanuló jeles eredménnyel érettségizett" ítélet igaz, ha a valóságban az illető tanuló jeles eredményt ért el az érettségi vizsgán. Ellenkező esetben hamis.

Igaz ítéleteket kaphatunk közvetlen tapasztalat, megfigyelés alapján is. (Például fenti ítélet megalkotásához elegendő az érettségi bizonyítvány megtekintése.) Ítéleteink nagy részét azonban más ítéletekből logikai műveletekkel nyerjük. Az így kapott ítéletek igazsága két tényezőtől függ: 1. azon ítéletek igazságától, amelyeken a logikai műveleteket végezzük; 2. a logikai művelet, amelynek eredményeként az új ítéletet kaptuk, alkalmas-e arra, hogy reprodukálja az ítélet objektumai között fennálló kapcsolatot. Ez esetben nevezzük a logikai műveletet *helyes*nek.

Az a tény, hogy a gondolkodás *igaz* vagy *hamis* volta fejezi ki a gondolkodás valósághoz való viszonyát, nem jelenti azt, hogy a gondolkodás *helyességének* vagy *helytelenségének* semmi köze nincs a valósághoz. Logikai műveletünk csak akkor lesz helyes, ha a dolgok összefüggéseinek és viszonyainak megfelelően járunk el. Így tehát a logikai helyesség fogalma a logikai műveleteknek a valósághoz való viszonyát jellemzi éppen úgy, mint ahogyan az igazság fogalma jellemzi a gondolat viszonyát a valósághoz.

A logikai helyesség és a gondolat igazsága kapcsolatának, de ugyanakkor különbözőségének bemutatására soroljuk fel a kettő összefüggésének lehetőségeit:

1. Igaz gondolatokból indulunk ki, és a logikai művelet helyes.

2. Igaz gondolatokból indulunk ki, és a logikai művelet helytelen.

3. Hamis (vagy részben hamis) gondolatokból indulunk ki, és a logikai művelet helyes.

4. Hamis (vagy részben hamis) gondolatokból indulunk ki, és helytelen a logikai művelet.

A logikának nem feladata annak vizsgálata, hogy az egyes ítéletek gondolati tartalma megfelel-e a valóságnak, igaz-e vagy sem. Az egyes ítélet igazsága csak a logikai műveletek helyességétől való függőségében képezi vizsgálódási tárgyát.

Az a tény, hogy a logika a helyes gondolkodás követelményeit tanulmányozza, nem jelenti azt, hogy helyesen gondolkodni csak az az ember képes, aki tanulmányozta a logika szabályait. Egy ilyen feltételezés éppen úgy hibás lenne, mintha valaki azt képzelné, hogy csak az tud jól futni, aki fizikát tanult.

Az embereket nem a logika tudománya tanítja meg gondolkodni, de a helyes gondolkodás szabályainak ismerete fejleszti gondolkodási készségünket.

Vitákban néha az tapasztalható, hogy a vitatkozó felek bár lényegében igaz tényeket állítanak, nem tudják elérni a kívánt hatást, mert nem tudják pontosan és szabatosan kifejteni gondolataikat, mivel nem találják meg a szükséges logikai (és olykor ennek következtében nyelvi) formát. Nem képesek megalapozni állításaikat, és olyan tételekből igyekeznek levezetni azokat, amelyekből valójában nem következnek. Nincsenek a bizonyítás eszközeinek birtokában. Megpróbálnak cáfolni valamely valóban hamis nézetet, de nem tudják kimutatni a hamisságát, és így csak annak ismételgetésére szorítkoznak, hogy a vitatott tételek nem felelnek meg a valóságnak. Gyakran előfordul, hogy nem látják kimondott ítéleteik következményét, és így egyik ítéletükkel ellentmondanak a másiknak stb.

A logika ismerete segít abban, hogy leküzdjük gondolkodásunkban az ilyen hiányosságokat, s olyan eljárásokat alkalmazzunk, amelyek megfelelő eszközök valamely állítás igazságának bizonyítására vagy hamis voltának kimutatására.

A logika tárgyáról eddig elmondottak természetesen korántsem elegendők ahhoz, hogy kellően körülhatárolják a logika tudományát. Pontosabban megérteni azt, hogy mi a logika lényege, csak e tudomány tartalmának tanulmányozásával lehetséges.

2. GONDOLKODÁS ÉS NYELV

A gondolat nyelvben ölt testet. A gondolat közvetlen valósága a nyelv. „A nyelv *maga* a gyakorlati, más emberek számára is létező, tehát a magam számára is csak ezáltal létező valóságos tudat..."[3]

A nyelv nem a kész gondolatokra ráhúzott testi forma. A gondolatok valamely nyelv adott struktúrájának, kifejezési lehetőségeinek keretein belül keletkeznek. A gondolat és a nyelv viszonya azonban nem egyoldalú, hanem bonyolult kölcsönhatásos folyamat. A nyelvben objektiválódott gondolat alkalmassá válik arra, hogy mások számára is létezzen, lehetővé teszi a gondolatok kicserélését, ezen keresztül gazdagodását, előrehaladását. A gondolatok fejlődése a nyelv differenciálódását, gazdagodását, új kifejezési lehetőségek létrejöttét vonja maga után, és ez további keretül szolgál a gondolatok fejlődésének.

A gondolkodás logikai formái nyelvi formákban valósulnak meg. A gondolkodásformák vizsgálata csak nyelvben testet öltött formák vizsgálatán keresztül valósulhat meg.

Nyelvi forma *önmagában* ugyanúgy nem létezik, mint ahogy nincs logikai forma sem önmagában. A „nyelvi forma" tudományos elvonatkoztatás, a tartalomtól való absztrakció eredménye, objektív alapja az, hogy pl. az egyes mondatokban tartalmi különbségeik ellenére azonos vonások vannak. Ilyen pl. a szerkezeti formájuk, amelyet a mondat tartalmától függetlenül vizsgálódás tárgyává lehet tenni.

Bár nincsen logikai forma nyelvi forma nélkül, a kettő nem azonos egymással. Kitűnik ez már abból is, hogy egy és ugyanazon gondolat — egy nyelv keretein belül is — többféle nyelvi formában fejezhető ki,[4] másrészt viszont egy és ugyanazon nyelvi forma különböző gondolatok kifejezője lehet.[5]

A gondolkodás és nyelv azonosságának és különbözőségének dialektikája megmutatkozik a nyelvtudomány és a logika kapcsolatában is. A két tudományterület kezdetben nem határolódott el egymástól. Maga a „logos" — amelyből a mi logika szavunk származik — az ógörög nyelvben egyaránt jelent gondolatot és beszédet. A „logos"-ra vonatkozó vizsgálódások is egyaránt felölelik a gondolkodás és a nyelv területeit. Például Arisztotelész műveiben nehéz, néha lehetetlen feladat lenne megállapítani, hol fejeződnek be a logikai vizsgálódások és hol lépnek át a nyelvtudomány területére. A ma nyelvtudománya olyan kérdésekkel is foglalkozik, amelyek egyben logikai problémák is, és fordítva, a logikai vizsgálódások számos problémája csak nyelvészeti tanulmányokkal együtt oldható meg. Így ma is számos esetben nehéz szigorúan megvonni a két tudomány határát. Mindezek ellenére rá lehet és rá kell mutatni a két tudomány közötti különbségekre is.

Míg a logikai rendszerek azokat a törvényeket tartalmazzák, amelyek alapján adott ismeretekből további információkat kaphatunk a valóságról, a nyelvi rendszer azoknak a szerkezeti formáknak és szerkesztési szabályoknak az összessége, amelyek birtokában a nyelvet használó közösség tagjai információkat képesek tárolni és eljuttatni egymáshoz.

A nyelvtudomány fő kérdése az, hogyan lehet az egyes nyelvekből adódó „végtelen" sokaságú érvényes mondatot adekvát, általános és egyszerű szabályrendszerbe foglalni. De az érvényes mondatok képzésének szabályai nem elegendőek a logikai érvényesség megállapításához.

A nyelvtudományban megállapított szabályok a kommunikációk során kialakult beszéd szabályainak tudományos absztrakciói. A nyelv a külvilág tudati reprodukálásának eszköze, a nyelv szabályai ezen eszközök használatának szabályai. Ellentétben a logikai szabályokkal, amelyeket végső soron a tudatban reprodukálandó objektumok közötti relációk határoznak meg, a nyelv szabályait a nyelvet mint eszközt használóknál kialakult normák határozzák meg.

A „nyelv" kifejezés szűkebb és tágabb értelemben is használatos. Szűkebb értelemben azt a természetes nyelvet értik rajta, amely közös sajátja egy-egy nemzet tagjainak és amely írás vagy beszéd

formájában valósul meg. Tágabb értelemben beleértjük a különböző tudományokban a természetes nyelv kiegészítéséül használt speciális nyelvi jeleket is. Így pl. a matematikai képletek a matematika sajátos nyelvéhez tartoznak, a műszaki rajzok a műszaki tudományok nyelvéhez stb., vagy beszélünk a művészetek nyelvéről (pl. zenei nyelv). Még szélesebb értelemben: nyelv bármely olyan jelrendszer, amely alkalmas információk továbbítására, kicserélésére.

A logika nyelve maga is változáson, fejlődésen ment keresztül. A logikai formák tartalomtól elvonatkoztatott vizsgálata speciális logikai nyelv, szimbolikus nyelv kialakulásához vezetett. Ma már nemcsak a „logikai tudomány nyelvéről", de egyes fejezeteinek nyelvi (jel) rendszeréről (pl. a kijelentéskalkulus, az osztálykalkulus, a predikátumkalkulus külön nyelve) is lehet beszélni.

3. HAGYOMÁNYOS ÉS MODERN LOGIKA

Logikai vizsgálódásokkal már az ókor tudósai is foglalkoztak. A kínai, a görög filozófusok már az i. e. VI—V. században számos logikai természetű kérdést vetettek fel és oldottak meg. Rendszeres formában logikai vizsgálódásokkal először Arisztotelésznél (i. e. 384—322) találkozunk. Logikai tárgyú tanulmányainak gyűjteményében, az „Organon"-ban a logika terén megelőzőleg feltárt ismeretek összefoglalása, rendszerezése és olyan mérvű továbbfejlesztése található meg, hogy ezért Arisztotelész méltán kapta a „logika atyja" megtisztelő nevet. Fő érdeme a következtetések egy csoportjának, az ún. kategorikus szillogizmus elméletének kidolgozása. De jelentősek a logika más területeire vonatkozó megállapításai is. Így pl. a gondolkodásforma és a törvény fogalmak vizsgálata, a kategóriák elmélete stb.

Jelentős állomás a logika fejlődésében a sztoikus logika és a XII—XIV. század skolasztikus logikája. Duns Scotus, Occam, Petrus Hispanus munkáiban olyan ítélettípusok, következtetések szabatos elemzését találjuk, amelyeket az arisztotelészi logika

egyáltalán nem tárgyalt. Fontos gondolatokat tartalmaznak e munkák a nyelv és a logika kapcsolatának elemzésében is.

A középkor hanyatló szakaszában a logikai kutatások is elvesztik életerejüket. Nemcsak hogy új felfedezések nem születnek, de a már elért eredmények is eltorzulnak, beleértve magát az arisztotelészi logikát is. Sajnálatos módon a későbbi korokban nem a középkori logika néhány valóban kitűnő gondolatát vitték tovább, hanem a metafizikus torzulásokat, és ennek hatása egészen a mai napig is fellelhető.[6]

Ez a középkor hanyatló szakaszában megmerevedett logika nem volt alkalmas arra, hogy a megismerés eszköze legyen. Ezért léptek fel ellene az újkor nagy filozófusai. Ezek közül mindenekelőtt F. Bacont (1561—1626) kell megemlíteni. Bacon olyan rendszeres és szigorúan tudományos módszert kívánt adni, amellyel az egyes tények alapján fel lehet tárni az általános törvényeket. Művét „Új Organon"-nak nevezte el Arisztotelész „Organon" című művével szemben. Valójában Bacon tanításai nincsenek ellentétben a valódi (torzítástól mentes) arisztotelészi logikával, hanem a logika más területére tartoznak. Míg az arisztotelészi logika deduktív logika, Bacon logikai vizsgálódásaiban az induktív logikát alapozza meg.

A tudományos megismerési módszerek továbbfejlesztési szükségletét szem előtt tartva Leibniz (1646—1716) a logikai vizsgálódások terén új utat javasol. Abból indul ki, hogy az emberek közötti kölcsönös megértés hiányának alapvető oka, hogy különböző nyelveken beszélnek, hogy a nyelv szavai definiálatlan fogalmakat takarnak. Ezért a feladat szerinte olyan nyelv megteremtése, amely megszünteti a szavak többértelműségének lehetőségét. Szerinte ha a matematika példájára a többi tudományokban is néhány szabatosan definiált alapfogalomból indulnának ki, és speciális logikai jelek, jelkombinációk használatával a matematikai számításokhoz hasonlóan építenék fel a fogalmak rendszerét, meg lehetne szüntetni a vég nélkülinek látszó vitákat, ki lehetne számítani, ki állít igazat és ki téved. Bármennyire is utópisztikusak voltak Leibniz elgondolásai, azzal, hogy elsőnek veti fel a matematikai kiszámítási módszerek (kalkulusok) logikai alkalmazásának lehetőségét, a matematikai logika elméleti megalapozójává lett.

Több mint száz évnek kellett eltelnie ahhoz, hogy Leibniz nagy gondolata — matematikai jellegű kiszámítások alkalmazása a logikában — követőkre találjon és a matematikai logika előtörténetének szakaszából átjussunk a matematikai logika, a modern logika kibontakozásának korszakába. E korszak G. Boole (1815—1864) „A logika matematikai elemzése" (1847) c. munkájának megjelenésével veszi kezdetét. Boole és hozzá hasonlóan a logikai algebra kidolgozásával foglalkozó többi logikus (De-Morgan, Peirce, Schroeder, Poreckij és mások) a logikai és a matematikai — főleg algebrai — törvények analógiáit és különbözőségeit vizsgálták. Azt a célt tűzték maguk elé, hogy a matematikai módszerek alkalmazásával tökéletesítik a logikai vizsgálódásokat.

A matematikai módszerek alkalmazásának továbbfejlesztésére sürgetőleg hatott az a tény is, hogy a XIX. század végén a matematikában olyan logikai jellegű problémák merültek fel, amelyekre a logika tudományában addig elért ismeretek alapján nem lehetett választ adni. Ezért a matematikusok egy része (G. Peano, A. N. Whitehead, B. Russell, D. Hilbert és még sokan mások) *a matematika* logikai megalapozása céljából logikai problémák vizsgálatával kezdett foglalkozni. Így találkozott egymással a logika matematikai módszerekkel való kidolgozásának a logikusok részéről felmerült igénye azzal a szükséglettel, hogy a matematika logikai problémáit a matematika számára használható módszerekkel dolgozzák fel.

Ismerkedjünk meg a matematikában felmerült logikai problémák egyikével.

Az euklideszi geometria axiómáinak egyike a párhuzamosság axiómája, amelyet röviden így fogalmazhatunk meg: ha egy sík két egyenesét egy harmadik egyenes úgy metszi, hogy a metsző egyenes valamelyik oldalán fekvő belső szögek összege kisebb az egyenesszögnél, akkor a két egyenes megfelelő távolságban metszi egymást.

Ennek az axiómának evidens voltát már az ókorban vitatták, azonban sem bebizonyítani, sem érvényességét megcáfolni nem sikerült. Bolyai János (1802—1860) és tőle függetlenül N. Lobacsevszkij (1793—1856) az axióma indirekt bizonyítására törekedtek. Feltételezték, hogy e tétel, a párhuzamosság axiómája — nevezzük „A" tételnek — hamis. Ha „A" tétel hamis, akkor a „nem-A" tétel igaz. Ha igaz tételt más igaz tételekkel kapcsolunk

össze, és logikailag helyesen következtetünk, ismét igaz tételt kapunk. Viszont ha a „nem-A" tétellel végzett helyes következtetések eredményeként hamis tételt kapunk, ez a „nem-A" tétel hamisságát és ezen keresztül az „A" tétel, vagyis a párhuzamosság axiómájának igazságát bizonyítja. Az ellenkezőjével való bizonyítás során sem Bolyai, sem Lobacsevszkij nem jutott a párhuzamosság axiómájának tagadásából („nem-A") hamis tételhez, ellenkezőleg, olyan rendszert kaptak, amelyben az egyes tételek logikus menetben kapcsolódnak egymáshoz.

De hátha azért nem jutottak hamis tételre — merül fel a kérdés —, mert kevés következtetési eljárást próbáltak ki? Lehet, hogy van olyan következtetési eljárás, mely logikailag helyes, és amelyet alkalmazva a közvetett bizonyítás mégiscsak sikerrel járna? Itt már olyan logikai problémával állunk szemben, amelyet a XIX. század — Bolyai és Lobacsevszkij kora — nem tudott megválaszolni. Koruk logikatudománya ugyanis csak néhány legegyszerűbb következtetési eljárás regisztrálását nyújtotta, de még fel sem vetette azt a kérdést, hogy melyek az összes lehetséges következtetési eljárások. Márpedig a matematikusoknak ennek ismeretére lett volna szükségük. Számukra ugyanis mindegy: egyszerű vagy bonyolult, az ember köznapi gondolkodásában használatos vagy még soha nem használt eljárásról van szó, ha logikailag helyes eljárás, figyelembe kell venni mint olyant, amely alkalmas a tétel bizonyítására. A „nem-A" tételből logikailag helyes eljárással levezetett hamis tétel bizonyítéka lesz „A" tétel igazságának, akkor is, ha ez a logikailag helyes eljárás valamely, a hagyományos logika által regisztrált eljárás, de akkor is, ha ez olyan helyes eljárás, amelyet a hagyományos logika még nem vizsgált.

A fenti példa csak egy a sok közül, amelyek megmutatják, hogy a tudományok továbbfejlődésének szükséglete a XIX. században új típusú kérdéseket fogalmazott meg a logika számára, s a válaszadás csak új típusú logikával volt lehetséges.

A modern logika matematikai módszereket alkalmazó logika. Innen kapta a „*matematikai logika*" elnevezést. De a matematikai logika ugyanúgy nem speciálisan a matematika logikája, ahogyan a geometria sem a földmérés tudománya, holott ez földmérési feladatokból keletkezett, és a neve is erre utal.

A matematikai logikát más néven *szimbolikus logikának* is nevezik. Jeleket (szimbólumokat) a hagyományos logika, már Arisztotelész is használt. A szimbólumok használatának előnyös oldala, hogy szabatosságot, tömörséget és gazdaságosságot biztosítanak bonyolult kifejezések esetében. Ez nyilvánvaló már az elemi matematikából is.

Pl. $(a+b)\,(a-b) = (a^2-b^2)$ szimbólum tömören fejezi ki a következőt: két szám összegének és ugyanezen két szám különbségének a szorzata egyenlő a két szám négyzetének különbségével.

Bonyolultabb összefüggések kifejezése szimbólumok nélkül már jóval nehezebb. Pl. $ax^2+bx+c = 0$ egyenlet gyökét megadja

az $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ formula.

Ezt az összefüggést speciális matematikai jelek használata nélkül, a köznyelv eszközeivel kifejezni már oly nehézkes, hogy szinte lehetetlen megérteni.

Már Arisztotelész azért használt szimbólumokat, hogy eltekinthessen a szimbólumokban kifejezett dolgok konkrét minőségétől, sajátosságaitól. Így pl. a kategorikus szillogizmus érvényességének vizsgálatánál Arisztotelész eltekint attól, hogy A, B, C szimbólumok milyen konkrét dolgok szimbólumai. A szimbólumok használatával jobban megmutatkozik, hogy e következtetések konkrét tartalmuktól függetlenül logikailag helyesek. Például:

Ha minden A rendelkezik B sajátossággal és
minden C rendelkezik A sajátossággal,
akkor minden C rendelkezik B sajátossággal.

E következtetés érvényességének vizsgálatánál nem kell figyelembe venni azt, hogy az A, B, C szimbólumok milyen tárgyakról megalkotott gondolatok jelei. A következtetés logikailag helyes lesz, bármilyen konkrét tartalmat helyettesítünk is a betűk helyébe.

De Arisztotelész a helyes következtetések vizsgálatánál nemcsak szimbólumokkal operál. Nem formalizálja a következtetés premisszáiban kifejeződő viszonyt, nevezetesen a „sajátossággal rendelkezés" viszonylatát.

Szó volt már arról, hogy a logikai formák vizsgálatában a logika különböző fejezetei egymástól eltérő mértékben absztrahálnak e formák tartalmától. A szimbolikus logika általában a tartalomtól való absztrakció magasabb fokán vizsgálja a gondolkodásformákat, mint ezt a hagyományos logika tette. Az, ami a hagyományos logikában a gondolat logikai formáját képezte, a szimbolikus logikában mint logikai viszonyok tartalma jelentkezik. A szimbolikus logika e tartalomtól is bizonyos mértékig elvonatkoztat. A logikai műveletek formáinál is további elvonatkoztatásokat, általánosításokat hajt végre. Így lehetőség adódik arra, hogy szimbolikus jelekkel fejezze ki a logikai viszonyokat és a logikai műveletek szabályait.

Ily módon sikerült elérni, hogy a szimbolikus logikában a szokásos tartalmi gondolkodási eljárás helyett meghatározott formális szabályok alapján szimbólumokkal végzett formális műveletekkel lehet az eredményt megkapni, „kiszámítani". Ebben látják a szimbólumok használatának lényegét a matematikai logika klasszikusai is. Így nyilatkozik pl. D. Hilbert és W. Ackermann is:

„A logikai következményhez való átmenet — amely a következtetés műveletével valósul meg — széttagolódik végső elemeire és a kiinduló formulák bizonyos szabályok szerinti formális átalakításává válik, amelyek révén az algebrai számoláshoz analóg módon a logikus gondolkodás mint logikai kalkulus jelenik meg. Ez a kiszámítás lehetőséget teremt olyan problémák sikeres megoldásához, amelyekkel szemben a tisztán tartalmi logikai gondolkodás elvileg tehetetlen. Ezek közé tartozik pl. az a kérdés, hogyan jellemezhetők azok a kijelentések, amelyekre valamely adott előzményekből egyáltalán következtetni lehet.[7]

A szimbólumok minőségileg új használati módja következményeként a modern logika valóban korszerű, a hagyományos logikát továbbfejlesztő logika. Ezt bizonyítja először is az, hogy az összes hagyományos logikai következtetésmód érvényességét a megelőző igazolásoknál egzaktabb módon bizonyítja. Másodszor, számos olyan következtetési eljárás érvényességét is igazolja, amelyek a hagyományos logikában fel sem merültek. Továbbá kapcsolatot teremt a logika és a gyakorlati élet, a technika szükségletei között. Ugyanis a gondolatformák és műveletek matematikai módszerekkel

való vizsgálatának eredményeként — a gondolati munka mechanizmusát feltárva — bizonyos gondolati folyamatok gépekkel elvégeztethetők, s így az ember mechanikus gondolati munkák alól szabadul fel. A logikai műveletek elvégzését sokszorosára gyorsító gépek alkalmazási lehetőségét megteremtve, a logika a technika és a tudományos fejlődés hatalmas tényezőjévé vált.

Az, hogy a modern logika a hagyományos logika továbbfejlődésének eredménye, egyben azt is jelenti, hogy a kettőt nem lehet egymással szembeállítani. A hagyományos logika tudományos eredményeinek nem mond ellent a modern logika. Például a hagyományos logika részét képező arisztotelészi szillogisztika tovább él a mai logikában, mint ahogy az euklideszi geometria is szerves része korunk matematikatudományának.[8]

A modern logika maga is állandóan fejlődik, gazdagodik. Kezdetben — fejlődésének fő áramlata a matematikai érdeklődés és alkalmazás irányában haladt. Ebben a szakaszban jöttek létre azok a (ma már klasszikusnak nevezett) logikai kalkulusrendszerek, amelyeknek hivatása lett volna a matematika tudományos épületét logikailag megalapozni. Viszonylag rövid idő után azonban kiderült, hogy a matematikai módszerek alkalmazásával kiépített deduktív logikai kalkulusrendszerek nem váltják be teljesen a hozzájuk fűzött reményeket. Nem tudják a matematika minden kétséget kizáró megalapozását biztosítani. Szükségessé vált megválaszolni ennek az okát. Ez időtől kezdve indulnak el a modern logikában a *metodológiai* vizsgálódások, amelyek a logikai rendszerek természetének, felépítésének, egymáshoz való viszonyának vizsgálatával, továbbá, e problémát kiszélesítve, általában a tudományos megismerési módszerek elméletével foglalkoznak.

G. Frege (1848—1896) munkásságától kezdve a modern logikában is felmerülnek azok a nyelv és logika kapcsolatára vonatkozó problémák, amelyek már a hagyományos logikusokat — Arisztotelésztől és a korai skolasztikus logikusoktól kezdve egészen Leibnizig — foglalkoztatták, de kielégítő megoldást nem nyertek. Ezekhez társulnak azok a modern logika talaján keletkezett kérdések, amelyek a szimbolikus logikai jelek és a *jelek által* megjelöltek (a jelek denotátumai) viszonyára vonatkoznak. Ezek az ún. *logikai szemantikai* vizsgálódások a modern logikában a XX.

század elején indulnak erőteljes fejlődésnek. Ebben az időben jön létre A. Tarski, T. Kotarbinski vezetésével a lengyel szemantikai iskola. Tarski és W. Morris amerikai logikusok munkáját felhasználva R. Carnap a negyvenes évektől kezdve egy sor azóta klasszikussá vált logikai, szemantikai munkát publikált.

A szemantikai és a metodológiai elemzésekkel a modern logikában a filozófiai szempontból is fontos kérdések válnak vizsgálat tárgyává. Így pl. a „létezés" fogalma, az „univerzáliák" kérdése, az ítéletek és a következtetések természete stb. E kérdéseknek a dialektikus materialista filozófia alapján történő megválaszolásában az utóbbi időben a marxista logikusok eredményes munkát végeznek.

A modern logika tematikájának bővülése nem jelenti azt, hogy a szűk értelemben vett matematikai logika, vagyis a logikai kalkulusok terén nincs további fejlődés. A Frege és Russell által létrehozott klasszikus kalkulusok egyes oldalainak kritikáiként (de nem megsemmisítve azok eredményeit) létrejöttek az ún. nem-klasszikus logikák. Ezek kidolgozásában már határozottabban megmutatkozik a logika matematikához kapcsolódó ágának bizonyos fajta szétválása a logika filozófiai vonatkozású problémáitól.

Az utóbbi időben több logikus felveti, hogy a logika tudománya egy matematikai diszciplínára és egy filozófiai logikára válik szét.[9]

A matematikai diszciplína feladata logikai kalkulusok, formális kiszámítási eljárások kidolgozása. E kalkulusok a filozófiai logika „műszerei", amelyekkel pontos eredményeket lehet elérni. A „műszer" fejlesztése (a logika matematikai irányú fejlesztése) fontos feladat, de az ebben az irányban végzett kutatás nem tévesztendő össze magával azzal, amire e műszer irányul. A logika nem merülhet ki a kiszámítási eljárások matematikai jellegű kidolgozásában. A filozófiai logika — amelynek feladata a gondolkodási formák vizsgálata — a megismerés módszerével foglalkozó tudomány, és mint ilyen filozófiai tudomány. Filozófiai jellege abban is megmutatkozik, hogy olyan kérdésekre ad választ, amely kérdések megválaszolása szoros kapcsolatban van az ismeretelméleti, valamint ontológiai problémákkal.

A filozófia és a logika kapcsolatának kérdésére még visszatérünk, most azonban a hagyományos logika és a modern logika viszonyának a fentiekben vázolt felfogásából néhány pedagógiai vonatkozású következtetést szeretnénk levonni.

Az a tény, hogy a modern logika kidolgozott bizonyos matematikai jellegű eljárásokat, nem jelenti azt, hogy minden oktatási fokon, közlési szinten kötelező ezek használata. A logikai szakembernek természetesen elengedhetetlen a matematikai logika apparátusának ismerete még akkor is, ha a logika filozófiai problémáival kíván foglalkozni, de ha elemi logikai ismereteket akar nyújtani, akkor nagyon kell vigyáznia arra, hogy a szimbolikus manipulációk tanítása ne váljon öncéllá.[10] Nézetünk szerint nemszakember olvasóközönség részére a modern logika *kiszámítási apparátusából* csak annyit kell nyújtani, amennyi elengedhetetlen az alapvető logikai tartalom megértéséhez. Ezt a kifejtési módot választottuk jelen könyvünkben.[11]

4. FORMÁLIS LOGIKA ÉS DIALEKTIKA. DIALEKTIKUS LOGIKA

A leibnizi út — amely a matematikai logika létrejöttéhez vezetett — nem az egyetlen formája volt a kiútkeresésnek. Az eltorzult logikai tanításokra való reakcióként jött létre a XIX. század elején a hegeli dialektikus logika is. Hegel (1770—1831) történeti érdeme, hogy először vizsgálta rendszerezve a logikai formák dialektikáját.[12] Kimutatta, hogy magának a gondolkodásnak a természete a dialektika, hogy az elért gondolati eredmények egyike sem végleges. A gondolkodás ellentmondásos fejlődésen keresztül előrehaladó folyamat, és az igazság a felismerés folyamatában, a megismerés alacsonyabb fokáról a magasabb fok felé haladás folyamatában bontakozik ki.

A gondolkodás dialektikus felfogásából következik Hegel álláspontja a logikatudomány tárgyáról. A logikának a gondolkodást a maga fejlődő ellentmondásaiban, mint ellentmondások egységét kell ábrázolni. A gondolkodásban ilyen ellentmondás az

értelem és az ész ellentmondása. Az értelmi fokon a gondolkodás szétválaszt, elvonatkoztat, megkülönböztet, elszigetel. Mivel e tevékenység nélkül nem jöhet létre fogalom, ítélet, ezért az értelmi mozzanat minden megismerés elengedhetetlen feltétele. Az ész feladata felismerni azt, hogy az értelemszerű nem végső valami, hogy a szétválasztott, elszigetelt összefügg, hogy az elvonatkoztatott, megkülönböztetett összetartozik. Ám e tagadás a megismerésnek csak közbülső mozzanata, amely önmagában szintén nem igaz. A megismerés csak az értelem és az ész egységében, „az értelmes ésszel vagy ésszerű értelemmel" juthat az igazság birtokába. A logika feladata e három mozzanatból összetett logikum felismerése, feltárása.

Hegel szavaival: „A *logikainak* a forma szempontjából három oldala van: a) az *elvont vagy értelmi*, b) *a dialektikus vagy negatívan-ésszerű*, c) *a spekulatív vagy pozitívan-ésszerű*.

Ez a három oldal nem három *része* a logikának, hanem *mozzanatai minden logikus-reálisnak*, azaz minden fogalomnak, vagy minden igaznak általában.[13]

Hegel elismeri az arisztotelészi logikának és középkori továbbfejlesztésének érdemeit, de saját kora logikatudományáról így ír: „... alakja és tartalma ugyanaz maradt, mint amely hosszú hagyomány útján öröklődött tovább, de ebben az áthagyományozásban egyre hígabbá és soványabbá vált; még nem volt érezhető benne az új szellem, amely éppúgy jelentkezett a tudományban, mint a valóságban. Ámde egyszer s mindenkorra hiábavaló törekvés, hogy az ember fenn akarja tartani egy korábbi műveltség formáit, amikor a szellem szubsztanciális formája átalakult; hervadt levelek ezek, amelyeket lehullatnak a gyökereiken már-már fakadt új rügyek."[14] Ezen „új szellem" logikáját *spekulatív logikának* nevezi Hegel.

A spekulatív logika az értelminek és az ésszerűnek a szintézise. „Magasabb rendű mind a kettőnél, értelmes ész, vagy eszes értelem."[15]

Hegel a spekulatív logikát megelőző logikát *formális logikának* nevezi. E formális logikához való viszonyában három momentum társul: 1. *Negatív viszony* kora logikatudományának egyoldalúságához. *Tagadása* a végleges örök igazságok metafizikus elméletének általában és különösen az értelmi tevékenység eredményeit örök

igazságként feltüntető nézeteknek. 2. *Megőrzése* mindannak, amit a logika tudománya Hegel koráig alkotott. 3. A formális logikát olyan alapnak tekinti, amelyen *továbbhaladva*, azt *tovább*fejlesztve el lehet jutni az igazság megismeréséhez.

Ismeretes, hogy a marxista filozófia klasszikusai — (Marx, Engels, Lenin) — sokat foglalkoztak a hegeli logikával, annak értékelésével. Forradalmi jelentőségűnek tartották azt, hogy Hegel a gondolkodást mint fejlődési folyamatot elemezte.[16] Ugyanakkor Marx rámutatott arra a döntő különbségre, amely az ő materialista és Hegel idealista nézete között e kérdésben fennáll: „Hegel számára a gondolati folyamat, amelyet eszme néven még önálló alannyá is alakít, demiurgosza a valóságnak, amely annak csak külső megjelenése. Nálam, megfordítva, az eszmei nem más, mint az emberi fejben áttett és lefordított anyagi."[17] Lenin — Marx és Engels nézeteivel összhangban — a hegeli logika lényegének a dialektika kidolgozását tekintette. „Hegel logikájának — írta Lenin — eredménye és összefoglalása, végső szava és lényege a *dialektikus módszer*."[18] A dialektikus módszer Hegelnél spekulatív burokba van ültetve, amelyből azt előbb ki kell hámozni és csak azután használható fel mint tudományos módszer. E munka elvégzését Marx vállalta magára.[19]

A „formális logika" terminust a marxizmus klasszikusai átvették Hegeltől. Egyetértettek azzal a bírálattal, amellyel Hegel kora logikájának metafizikus szemléletét illette.[20] Egyetértettek azzal is, hogy a régi *pusztán* formális logikai elemzések nem elegendők az ismerettől az ismeretlenhez való továbbhaladás formáinak feltárásához.[21] E folyamatot csak a formális logika és a dialektika *együtt* képes feltárni.[22] Engels e kettő (formális logika és dialektika) egységét nevezi a gondolkodás és a gondolkodás törvényei tanának. Erre az Engels több művében megismétlődő[23] gondolatra hivatkozik Lenin, és rámutat arra, hogy a dialektika Hegelnél és Marxnál „a megismerés keletkezését és fejlődését az átmenetet a *nem*-ismeréstől a megismeréshez tanulmányozza és általánosítja".[24]

A marxista filozófia logikai koncepciójának megértése szempontjából fontos rámutatni arra a bírálatra, amelyet Lenin gyakorolt e kérdésben Plehanov nézetei felett. Plehanov nem értette meg Hegel gondolatát a logika tárgyát illetően. A megismerési objektu-

mok két területét különböztette meg. Ezek közül az egyik területen a formális logika törvényei uralkodnak, a másik területen — az előzőtől függetlenül — a dialektika uralkodik. Ennek következtében az egyik területen a formális logika törvényei alkalmazhatók, és nem alkalmazható a dialektika, a másik területen viszont a dialektika törvényeit kell alkalmazni, és ez kizárja a formális logika törvényeinek alkalmazhatóságát. Például: „Arra a konkrét kérdésre, hogy egy konkrét tárgynak vannak-e konkrét tulajdonságai, vagy igennel, vagy nemmel kell felelnünk."[25] Ha nem egyszerű, hanem összetett, bonyolult tárggyal van dolgunk — írja —, nem adhatunk egyértelmű választ arra, hogy megvan-e valamely tulajdonsága vagy nem, mert ennek ellentmondó tulajdonságai vannak.[26]

Lenin rámutatott, hogy Plehanov itt nem dialektikusan gondolkodik, metafizikus álláspontra csúszik vissza. Dialektikus gondolkodással ugyanis nem lehet a gondolkodásnak dialektikus és nem-dialektikus formáit feltételezni. Lenin szerint *minden* természeti (beleértve a szellemi és társadalmi) jelenségben, még a legegyszerűbb viszonyokat tükröző elemi ítéletekben is, mint „sejtben" megvannak a dialektika összes elemeinek csírái, feltárhatók és fel is kell tárni azokat.[27] Plehanov tehát nem értette meg a dialektikát (sem a hegelit, sem a marxit), amikor azt, ami csak a gondolkodás absztrakciójában szétválasztható, úgy értelmezte, mint magának a gondolkodásnak és a logika tudományának részeit, különböző fokait.[28]

Valószínűleg Plehanov tévedésének is volt szerepe azokban a hibás Hegel-interpretációkban, amelyek a marxista filozófia logikai koncepciójának dogmatikus eltorzulásaihoz vezettek. Míg Hegel „minden logikus-reálisnak" *három önmagában* nem igaz mozzanatáról beszél, amelyek időben el nem határolódó momentumok, e felfogás (mellőzve a harmadik momentumot) a formális és a dialektikus mozzanatban az utóbbit az előzőtől elszakította, mint a gondolkodás alsó és felső fokát. E felfogás szerint a logika tudományának két önálló része van: az elemi logika tudománya, a logika alsó foka, a *formális logika;* és a logikatudomány felső foka, a *dialektikus logika*.[29] E nézetnek számos káros következménye volt, amelyek megnehezítették a marxista filozófusok körében a logika tudománya egészének fejlődését.[30]

A „formális logika", „dialektikus logika" kifejezések a mai marxista logikai irodalomban is használatosak. Bár a két terminus általánosan elfogadott definíciója mind a mai napig hiányzik, az utóbbi két évtizedben a marxista logikusok körében lefolyt viták eredményeként több lényeges kérdésben sikerült közös nevezőre jutni. Általánosan elfogadottá vált, hogyan *nem-helyes* e két diszciplína egymáshoz való viszonyát értelmezni.

Többé-kevésbé egyöntetű álláspont alakult ki abban a vonatkozásban, hogy a formális logika a már kész gondolatok formáit, a velük végzett logikai műveletek törvényeit, a logikai helyesség feltételeit vizsgálja. A formális logika *eltekint* a fogalmak és ítéletek fejlődésétől, önálló gondolatokként kezeli e fejlődési folyamat különböző periódusait tükröző gondolatokat. Egységes álláspontra jutottak abban is, hogy helytelen a formális logikát — azon az alapon, hogy a történelem folyamán hosszú ideig összefonódott a metafizikus módszerrel — azonosítani a metafizikus gondolkodás logikájával. A dialektikus logikának így nem lehet feladata a formális logika megállapításainak elvetése, sem haladottabb fokon való ismétlése; a dialektikus logika nem állítható ellentétbe a formális logikával.

A dialektikus logika tartalmát illetően több koncepció létezik.[31] Az egyik szerint a dialektikus logika a gondolkodás fejlődésformáit és törvényeit vizsgálja. Feladata annak a fejlődési folyamatnak a törvényeit kutatni, amely fogalmainkban, ítéleteinkben egy-egy új gondolati forma létrejöttéig végbemegy. Erre a koncepcióra utalnak Engels szavai, amelyek szerint a dialektikus logika a gondolkodás mozgásának formáit a fogalmak, a különböző ítéletek és következtetések formáit egymásból vezeti le, a magasabb formákat az alacsonyabbakból fejleszti ki. Világos azonban, hogy ennek a vizsgálatnak csakis úgy van értelme, ha támaszkodik a kor formális logikai eredményeire, csak vele kölcsönhatásban fejlődhet.

Egy másik lehetséges koncepció szerint a dialektikus logika azonos a dialektikus módszerrel. A dialektikus logika feladata, hogy feltárja a megismerő gondolkodásnak a logikai helyességen túlmenő feltételeit. Útmutatást ad arra vonatkozóan, hogyan kell a valósághoz közelednünk, ha adekvát módon akarjuk megismerni. Ebben az esetben a dialektikus logika részben vagy egészében azoknak a

problémáknak a marxista filozófia alapján történő megoldását tartalmazza, amelyeket a modern logika harmadik területeként (metodológia) említettünk.

Egy harmadik koncepció a dialektikus logikát a formális logika metatudományának tekinti. Olyan metaelméletnek, amely a formális logikában felmerülő filozófiai problémákat tárgyalja, filozófiailag megalapozza a formális logikát, megszabja alkalmazási lehetőségeit. E felfogás szerint a dialektikus logikának a tradicionális megismerési kategóriákon túl, a modern logika olyan kategóriáit is tanulmányoznia kell, mint a jel, jelentés, struktúra, információ, modell stb.[32]

A „formális logika" terminus nemcsak a formális logika—dialektikus logika relációban használatos. Más felosztási alapból kiindulva főleg a nyugati logikairodalomban formális logikán a következtetések elméletét értik, megkülönböztetve ezt a diszciplínát tágabb értelemben vett logikától, amelybe beletartozik a metodológia és a logikai szemantika. Az elnevezések itt sem egységesek. Egyes szerzők a formális logikába csak a deduktív következtetések elméletét foglalják bele, míg mások ilyen megszorítást nem tesznek; megint mások elvetik a logikának a következtetés elméletre való leszűkítését. Nem egységesek a nézetek abban sem, hogy a formális logika mellett még milyen területek tartoznak a logikához.[33] Mindezek a különbségek összefüggnek a logika tárgya körüli nézetkülönbségekkel, amelyekkel a következő pontban foglalkozunk.

Könyvünk természetesen nem ölelheti fel a mai logika szerteágazó tudományterületének az egészét. Lényegében azoknak a problémáknak a korszerű kifejtésére törekszünk, amelyeket már a hagyományos formális logika is felvetett. Tesszük ezt elsősorban azért, mert ezeket az ismereteket alapnak tekintjük a logika itt tárgyalásra nem kerülő többi fejezeteihez. A könyv néhány fejezetében (pl. III., IV.) számos olyan problémát is érintünk, amely nem sorolható a formális logika szűkebb meghatározásának keretei közé.

5. KÜLÖNBÖZŐ NÉZETEK A LOGIKA TÁRGYÁRÓL

A logikusok többnyire egyetértenek abban, hogy melyik következtetés logikailag helyes, melyik helytelen, hogy melyik bizonyítás elégíti ki a logika követelményeit, és melyikben található logikai hiba. Koránt sincs azonban ilyen egyetértés abban a kérdésben, hogy mi a következtetés, mi a logikai forma, törvény, és egyáltalán mik azok az objektumok, amelyek a logika tárgyát képezik.

Marx írja, hogy az ember termelő tevékenységében „önmagát egy általa teremtett világban szemléli".[34] A logikában az ember a maga gondolkodását egy általa a gondolkodásról teremtett „világban" szemléli. Az ember a saját szükségleteire és céljaira kialakította a fogalmakat, az ítéleteket, a gondolati műveleteket. E gondolati formák látszólag önálló létre tesznek szert, megvannak a maguk sajátos tulajdonságaik, törvényeik. Elvontságuk következtében úgy tűnhet, hogy a valóságos világhoz képest szuverén, független képződmények, amelyekhez a világnak igazodnia kell.[35]

E „rejtelmes" törvények meghatározott sajátosságainak megismerése végbemehet anélkül, hogy eredetük feltárulna, és így annak a kérdése, hogy mik ezek a törvények, amelyekkel a logika foglalkozik, külön megválaszolandó kérdéssé válik. Ezek a kérdések a *logika filozófiájának* kérdései. A „logika filozófiája" terminussal a logika világnézeti problémáit jelöljük, ezért meg kell különböztetnünk az előzőkben használt „filozófiai logika" kifejezéstől.

Minden tudománynak megvannak a maga filozófiai problémái. A logikában ilyen filozófiai probléma a logikai formák, műveletek eredetének, természetének kérdése, a logika helye a tudományok rendszerében. E problémák filozófiai, világnézeti jellegűek, mivel megválaszolásuk állásfoglalást feltételez a materialista vagy az idealista világszemlélet mellett.

A logika tárgyára vonatkozó nézetek különböző alapokon osztályozhatók. Eltérő vélemények vannak a logikai struktúráknak a gondolkodáshoz, az objektív valósághoz, a nyelvhez, a filozófiához való viszonyát illetően. Mindezekben a kérdésekben a nézetek összekapcsolódnak, de ugyanakkor az egyik viszonylatban való

állásfoglalás nem feltétlenül határozza meg a másik kérdésre adott választ. Gyakori, hogy valamely szerző bizonyos vonatkozásban az egyik iskolához sorolható, más kérdésekben viszont nem. Számolni kell azzal is, hogy az egyes irányzatokhoz tartozó kutatók nézetei változnak, tehát míg valaki pl. munkássága első időszakában az egyik irányzatra jellemző nézeteket hirdetett, működése egy más szakaszában megváltoztatta felfogását. Nem tekinthetjük feladatunknak ennek a nyomon követését. Nem kívánunk logikatörténetet adni. A könyv kereteit meghaladná a ma létező logikai iskolák szisztematikus ismertetése is. De vázlatosan — miközben összefoglaljuk a logika tárgyáról eddig elmondottakat — az alábbiakban néhány megjegyzésben utalunk más felfogásokra. E nézetek bírálatát, felfogásunk igazát, reméljük, a könyv egésze igazolja.

1. A logika a *gondolkodás* formáit, műveleteit vizsgáló tudomány. Tárgya különbözik a pszichológia tárgyától.

Egyes logikusok, a *pszichologista* logikai irányzat képviselői, e nézettel szemben a logikát a pszichológia részének, illetve egy fejezetének tekintik. E logikusok szerint a logika csak annyiban különbözik a pszichológiától, hogy míg a pszichológia minden gondolkodási folyamatot a szellemi tevékenység általános törvényeinek és az individuális esetek mindenkori feltételeinek alapjain vizsgálja, a logika figyelembe veszi az igaz és a hamis gondolkodás közötti különbséget és „az emberi észnek, az igazság keresésében kifejtett műveleteit tárgyalja".[36] A pozitivista pszichologizmus a logikát empirikus, leíró tudománynak tekinti, s egyben igyekszik a filozófiával szemben közömbösíteni. „A logika — írja Mill — az a semleges terület, amelyen Hartley és Reid, Locke és Kant követői találkozhatnak és egymásnak kezet nyújthatnak."[37] De a pozitivista, a filozófiailag „neutrális" pszichologizmus valójában azzal, hogy a logikai törvényeket egyedül pszichológiai alapon megmagyarázható törvényeknek tekinti, hogy tagadja a logikai törvények és formák kapcsolatát a dolgok objektív kapcsolataival, maga is meghatározott filozófiai álláspontot, mégpedig szubjektív idealista álláspontot foglal el. A pszichologista logikai iskola ezért nem képes a logikai formák és törvények valóságos természetét feltárni, hiszen egyedül a gondolkodásból kiindulva nem lehet megmagya-

rázni, hogy a logika törvényei szerint gondolkodva, helyes logikai eljárásokat alkalmazva miért kapunk igaz, a valóságnak megfelelő ítéleteket.

2. A logikai formák és törvények a valóságot visszatükröző gondolkodásnak a sajátosságai. Mint ilyenek közvetve maguk is az objektív valóság sajátosságait és viszonyait tükrözik vissza, általuk meghatározottak, de nem közvetlenül az objektív valóság törvényei.

A logika ontológiai felfogása szerint a logikai törvények az objektív valóság legáltalánosabb törvényei is. A logikai törvények feltárásával tartalmilag jelentős ismeretet kaphatunk a valóságról. A logika ontológiai felfogása Arisztotelészig vezethető vissza.

Ontológiai felfogáson alapul a hegeli logika is.

De míg Arisztotelésznél a valóság törvényei szolgálnak ontológiai alapul a logikai törvények feltárásához, Hegelnél a természetben, a valóságban megnyilvánuló „eszme", „logikum" mozgásának feltárása a feladat.[38]

Korunkban az ontológiai felfogás képviselői között a legelterjedtebb a *platonizáló*, vagy ahogy ennek a matematika filozófiai kérdéseit illető vetületét nevezik, a *logicista* felfogás. A platóni idealista filozófiának megfelelően szerintük az a valóság, amelyet a logika feltár, a tiszta formák, az örök eszmei létezők világa, amely valamilyen formában materializálódik az érzéki világban. Szerintük mindaz, ami a világról megtudható, logikai elemzés útján tudható meg. A logicizmus tipikus formáját képviselte fiatalkori munkáiban B. Russell. A logika törvényei, amelyek a matematika alapját alkotják — írja Russell egy 1910-ben megjelent tanulmányában —, „a tényleges és lehetséges dolgok változatlan lényegét alkotják", „...sokkal tovább visznek minket annál, ami emberi, az abszolút szükségszerűségnek abba a régiójába, amelynek nemcsak az aktuális világ, hanem minden lehetséges világ meg kell hogy feleljen."[39] A logikai struktúrák a lehetséges világok struktúrái.

A „Bécsi kör" neopozitivista logikai iskolája és követői bírálták Russell „metafizikai korlátozottságát". Szükségtelennek tartják bármiféle ontológiai tan kidolgozását. Úgy vélik, hogy a logika tételei nem tartalmaznak ismeretet a valóságról.

A neopozitivista G. Hempel pl. a következőket írja: „Kijelentések sohasem hasonlíthatók össze a realitással. Azok közül, akik a

realitás és a kijelentések szembesítése mellett kardoskodnak, senki nem képes pontos választ adni arra, hogyan valósítható meg a kijelentések és a tények összehasonlítása, és hogyan győződhetünk meg a tények struktúrájáról."[40]

A formalista iskola megalapítója, Hilbert, a logika formális rendszereit még azért kívánta létrehozni, hogy ezzel formalizálható elméletek igazolására teremtsen lehetőséget. A formalista filozófia szerint a logikai jelek már ténylegesen értelem nélküli jelek, üresek, tartalmatlanok, tautológiák.

A logicista és a formalista koncepció végletei között foglal helyet az *intuicionista* felfogás. Legjelentősebb képviselője, Brouwer, szerint a logika objektumainak eredete nem a külvilágban keresendő, ugyanakkor ezek az objektumok nem tekinthetők értelmetlen jeleknek sem. A logikai és matematikai objektumok a tapasztalattól független, szabad tudati konstrukciók, amelyek a priori intuícióból alakultak ki. A logikai objektumok léte megkonstruálhatóságukban van, vagyis, hogy levezethetők olyan állításokból, amelyeknek igazsága intuitive elfogadott. A matematikai és a logikai objektumok megérthetők egyedül a gondolkodásból, mivel ezek a prioriak, függetlenek a tapasztalattól, a külvilág sajátosságaitól.

3. Nincs gondolat nyelvi kifejezési forma nélkül, de a logikai formák nem azonosak a nyelvi formákkal. A nyelvi rendszer feltárása nem elegendő a logika megértéséhez. A logikát nem a nyelv struktúrája, hanem végső soron a valóság objektív összefüggései határozzák meg.

Szemben a múlt század pozitivistáival, akik a logika törvényeit a pszichológia törvényeibe akarták beolvasztani, a *mai pozitivizmus* a logika szabályait nyelvi szabályokkal azonosítja. Ez a nézet pregnánsan fejeződik ki R. Carnap „Logische Syntex der Sprache" c. 1934-ben megjelent könyvében. Carnap a logika szabályait olyan lingvisztikai transzformációs szabályoknak tekinti, amelyek a nyelv használatának általános szabályai. Az egyes nyelvek szintaxisa azt a struktúrát rögzíti, ahogyan e nyelvekben a mondatok elemeikből (szavak, szavak részei) felépülnek. A logikai szintaxis azt adja meg, hogy hogyan lehet premisszákból konklúzióra jutni. Ennek valamennyire pontos tanulmányozása — írja Carnap —

„csak akkor lehetséges, ha ez a tanulmányozás nem az ítéleteken (gondolatokon vagy gondolatok kapcsolatain), hanem a nyelvi kifejezéseken — amelyek közül a mondatok a legfontosabbak — alapul".[41]

Carnapéhoz hasonló véleménye van H. Reichenbachnak is. Reichenbach különbséget tesz nyelv és gondolkodás között és a logikát a gondolkodás „racionális rekonstrukciója"-ként definiálja. De mivel vitán felüli, hogy ez a racionális rekonstrukció nyelvi formában történik, ezért úgy véli, hogy a „logika a nyelv analízise, és a »logikai törvény« terminus helyettesíthető a »nyelvi szabály« terminussal".[42]

Nyelv és gondolkodás azonosításában Carnap és Reichenbach nézeteinél is messzebbre mennek el egyes *strukturalista* nyelvészek. Carnap, Reichenbach ugyanis nem tagadják, hogy gondolkodásformák léteznek, csak ezek megértéséhez egyetlen lehetséges és egyben elegendő eszköznek a nyelv vizsgálatát tartják. Bloomfield már egyenesen naivnak minősíti azokat a szerzőket, akik még együgyűen elhiszik, hogy a nyelv szavai és a matematika jelei mögött fogalmak találhatók.

A logikát e tudományt a nyelvre redukáló álláspontok leíró tudománynak tekintik. A logika a nyelvhasználat leírása. Hasonlóan ahhoz, ahogy pl. a sakk játékszabályai rögzítik a sakkban megengedett lépéseket, a logika szabályai azt írják elő, hogy adott mondatokból milyen más mondatok következését *kell elismerni*. A játék hasonlat azonban elfed néhány lényeges különbséget. Ugyanis míg a játékban megváltoztathatjuk a szabályokat, a logikában a szabályok nem megegyezés kérdései. A játékban éppen ezért a szabály „miért"-jének magyarázata csaknem kibogozhatatlan. Ezzel szemben a logikai törvények alapja felismerhető az objektív valóság összefüggéseiben.

4. Látnivaló, hogy a pozitivista beállítottságú logikai irodalomban erős tendencia van arra, hogy a logikát világnézetileg semleges tudománynak tüntessék fel. Ezzel szorosan összefügg az a törekvés, hogy a filozófia kérdéseit a logika, illetve a nyelv kérdéseire redukálják, azt állítván, hogy a filozófia egyéb problémái értelmetlenek, álproblémák. „Az egyes tudományok kérdésein kívül — írja Carnap — csak a tudományok, ezek mondatainak, terminusainak,

elméleteinek stb., logikai analízisének kérdései maradnak meg, mint valóban tudományos kérdések."[43]

A filozófiát a logikára leszűkítő nézetek a filozófiát világnézeti tartalmától akarják megfosztani. De helytelen lenne azt hinni, hogy a polgári logikusok között kizárólagos az „ideológia közömbösítés"-re való törekvés. A logika filozófiai jelentőségét, a saját filozófiájuk szolgálatába állított logika hasznát az idealista filozófusok közül ma is sokan felismerik. Világosan beszél erről pl. Clark atya könyvéhez írott előszavában Quine:

„A logikai tanulmányokat elködösítette és a nézeteket összekuszálta az a népszerű vélemény, hogy a régi és az új logika filozófiailag szembenállnak egymással, és hogy a pozitivista elkötelezettség nélkülözhetetlen a modern logikához." „De tévedés azt hinni, hogy a pozitivizmusnak és az ezzel rokon nézeteknek monopóliumuk van a modern logikában."[44] Taktikai és metodológiai hiba lemondani a filozófiai kutatásokban a modern logika jótéteményeiről. „Taktikailag ez kitérés a bírálók fölényével szemben, metodológiailag ostobaság, mivel negligál egy utat, amely az igazsághoz vezet."[45]

II. AZ ÍTÉLETEK DURVASZERKEZETÉNEK LOGIKÁJA

Az ítéletek durvaszerkezetének logikája (vagy más néven: a kijelentések logikája) a logika tudományának az a fejezete, amely az összetett ítéletek és az ezen ítéleteken alapuló következtetések logikai formáját vizsgálja. A logika e fejezete elvonatkoztat az összetett ítéleteket alkotó elemi ítéletek logikai szerkezetétől (finomszerkezetétől). Az elemi ítéleteket mint egységes egészet szemléli és kizárólag csak igazságértéküket veszi figyelembe.

1. AZ ÍTÉLETEKBŐL ÖSSZETETT ÍTÉLETEK

1.1. AZ ÍTÉLETEKRŐL ÁLTALÁBAN. ÍTÉLET ÉS MONDAT

Fogalom és ítélet egymást feltételező, kölcsönösen kiegészítő gondolatformák. Ítélet nincs fogalmak nélkül, az ítéletalkotás viszont az új fogalmak létrejöttének előfeltétele.

A fogalmak és az ítéletek történetileg is valószínűleg együtt fejlődtek ki, nem előzte meg egyik sem a másikat.

Az élő eleven gondolkodásban ritkán használunk külön-külön fogalmakat. Gondolataink ítéletekben vagy ítéletek láncolatában jelennek meg. Egyetlen ítélet is kerek, teljes gondolatot ad. Ha azt gondoljuk és mondjuk: „békeszerető emberek", akkor ebben a fogalomban az emberek egy bizonyos csoportját általánosítottuk.

De magukról a békeszerető emberekről még nem jelentettünk ki semmit, nem állítottuk és nem tagadtuk létezésüket, valamely tulajdonságukat vagy kapcsolatukat más dolgokkal. Amikor azonban azt mondjuk: „Minden országban vannak békeszerető emberek", akkor itt már állítás történt, amellyel kapcsolatban felvethető és eldönthető igazságértékének kérdése, vagyis az a kérdés, igaz-e, az állítás megfelel-e a valóságnak?[1]

Az ítélet olyan gondolatforma, amely állítást tartalmaz tárgyakról, viszonyokról, ezek egymás közötti kapcsolatairól. Az ítélet igazságértéke az ítéletben levő állítás és az ítélet tárgya közötti viszonylatot fejez ki. Az ítélet igazsága attól függ, hogy fennáll-e a *megfelelés* az állítás és a valóság között. Az egyes ítélet és a valóság közötti megfelelés minden esetben viszonylagos, részleges, mivel minden egyes gondolat elvonatkoztatás, és ezzel közte és a valóság között csak „durva megfelelés" áll fenn. A továbbiakban ún. *kétértékű logikai rendszerekkel* foglalkozunk. Az ilyen rendszerekben az ítélet két logikai érték (igaz, hamis) valamelyikével rendelkezik.

Ma már léteznek olyan logikai rendszerek, amelyekben az ítélet kettőnél több logikai érték valamelyikét veheti fel. De akár kétértékű, akár többértékű logikai szemléletmóddal vizsgálódunk, tehát bármely logikai rendszerben, a logikai elméletek felépítésének a feltételeként, érvényes az a törvény, hogy egy ítélet, egy állítás nem vehet fel egyszerre több értéket, és a megadott értékek közül valamelyikkel rendelkeznie kell.[2]

A kétértékű logikával szemben felmerülhet az az ellenvetés, hogy vannak olyan ítéletek, amelyek részben igazak, részben nem igazak, tehát igazak is meg nem is. Így pl. „Az atom az anyag legkisebb oszthatatlan része" ítélet tartalmaz bizonyos igazságot is, azt, hogy „az atom az anyag része", így csak részben nem-igaz állítás. Ezzel az ellenvetéssel szemben hangsúlyozni kívánjuk, hogy amikor a fentiekben igaz ítéletekről beszéltünk, akkor az ítéletet úgy tekintettük mint egységes egészet, amelyben *egy* állítás van. Ha *egy* állítást igaznak tartunk, nem tekinthető *ugyanez* az állítás nem-igaznak is. Minden állítás vagy igaz, vagy nem rendelkezik az igazság (a valósággal való megegyezés) sajátosságával.

Minden ítélet nyelvi kifejezési formáját tekintve mondat. De nem minden mondat fejez ki ítéletet, csak az, amely állítást tartalmaz. Például a „Mi Magyarország fővárosa?" kérdő mondat nem ítélet, mivel nem tartalmaz közvetlenül állítást. Ugyanígy nem ítélet a felszólító, az óhajtó mondat sem.[3] Az ítéletek nyelvi kifejezési formái a kijelentő mondatok.

A logikát a nyelvvel azonosító logikusok az ítéletet azonosítják a kijelentő mondattal, vagyis az ítéletet annak nyelvi formájával.[4] E nézet cáfolatával már részben foglalkoztunk, amikor a nyelv és gondolkodás kapcsolatáról általában szóltunk. Kiegészítésként az ott elmondottakhoz, itt még a következőket kívánjuk hozzáfűzni. Azt, hogy az ítélet nem azonos nyelvi kifejezésével, mutatja az is, hogy egy és ugyanazon ítéletet kifejezhetünk különböző nyelveken. Descartes ítélete: „Cogito ergo sum" lefordítható különböző nyelvekre („Fe pense, donc je suis", "I think, therefore, I am", „Gondolkodom, tehát vagyok").

Bár a nyelvi szabályok ismerete nem elégséges az ítéletek elemzéséhez, a nyelvi szabályok alkalmazása nélkül nem lehetséges ítélet. A nyelvi szabályok megsértése lehetetlenné teszi, hogy ítéleteink megismerési funkciójuknak eleget tegyenek, meghatározott állítást tartalmazzanak. Az ún. „pongyola" megfogalmazások az állítást nem fejezik ki pontosan, ezért csak ha szabatosítjuk, tekinthetők ítéletek nyelvi formájának, fejeznek ki állítást. Nyelvtankönyveinkből jól ismert példa erre János érsek válasza arra a kérdésre, hogy megöljék-e Gertrudis királynét. A válasz így hangzott: „A királynőt megölni nem kell félnetek jó lesz ha mindenki beleegyezik én nem ellenzem." Ítélettartalma nem meghatározott. Attól függően, hogy hova helyezzük a pontokat, illetve vesszőket, más-más állítást kapunk.

Logikai szerkezetük szempontjából az ítéletek két nagy csoportját különböztethetjük meg:

1. Vannak olyan ítéletek, amelyek alkotórészei is ítéletek, és az ítélet igazsága kiszámítható az őt alkotó ítéletek igazságából. Ezeket *összetett ítéletek*nek nevezzük.

2. Vannak olyan ítéletek, amelyek már nem bonthatók ítélet alkotórészekre, illetve igazságuk nem függvénye a bennük fellelhető ítéleteknek; ezek az *egyszerű ítéletek*.

A logika történetében az ítéletet rendszerint úgy határozták meg, mint valaminek állítását vagy tagadását valamiről. Az állítás vonatkozhat meghatározott tárgyra vagy tárgyakra, de vannak olyan ítéletek is, amelyek nem dolgok, hanem tények közötti összefüggéseket, kapcsolatokat állítanak.

Ha pl. „Az állat szervezet", „Péter és Pál szomszédok", „A szocializmusban a termelőerők és a termelési viszonyok között összhang áll fenn" ítéletek valamelyikét állítjuk, akkor ezekben az esetekben valóban tárgyakról (meghatározott dolgokról, Péter, Pál, termelőerők, termelési viszonyok) állítunk. Más esetekben azonban — pl. „Ha a Duna kiárad, akkor a Duna árterületére épült házak lakóit veszély fenyegeti" — nem valamely meghatározott dologról állítunk valamit, hanem bizonyos tények közötti összefüggések létezését állítjuk („A Duna kiárad", „A Duna árterületére épült házak lakóit veszély fenyegeti"). Logikai szerkezetüket tekintve ezek az ítéletek több ítéletre bonthatók fel. Megjegyezzük azonban, hogy ezek az ítéletek is csak egy-egy állítást tartalmaznak, mert felbonthatók ugyan más ítéletekre, de ezeket a részítéleteket nem állítjuk bennük. Vagyis ezek az ítéletek tények közötti kapcsolatokat állítanak, de maguknak az egyes tényeknek a fennállását nem állítják. Fenti példa esetében nem állítjuk, hogy „A Duna kiárad", és hogy „A Duna árterületére épült házak lakóit veszély fenyegeti".

A továbbiakban először tények közötti összefüggéseket kifejező összetett ítéletekkel fogunk foglalkozni.

1.2. AZ ÖSSZETETT ÍTÉLETEK JELLEMZÉSE

Összetettnek az olyan ítéletet nevezzük, amelynek alkotórészei ítéletek. E sajátosság kiemelése azonban még nem elegendő az összetett ítélet meghatározásához. Nem tartozik az összetett ítéletek csoportjába az „Éva azt gondolta, hogy János szereti Máriát" ítélet, mert, igazsága nem számítható ki, nem függvénye annak, hogy a „János szereti Máriát" ítélet igaz-e vagy hamis. A fenti példával ellentétben az ún. összetett ítéleteknél az ítélet igazságának ismeretéhez elegendő az ítéletet alkotó ítéletek igazságértékének ismerete.

Az összetett ítéletek logikai műveletek eredményeként jönnek létre. *Az összetett ítéletek létrehozására szolgáló logikai műveletek olyan műveletek, amelyeket egy vagy több ítéleten végzünk és eredményül ítéletet kapunk, amely ítélet igazsága csak azon ítéletek (ítélet) igazságának függvénye, amelyeken a logikai műveleteket végrehajtottuk.* A különböző logikai műveletek eredményeként kapott ítéletek a valóság más-más összefüggéseinek kifejezésére szolgálnak. A különböző összefüggések tudati reprodukálásához más-más logikai művelet elvégzése szükséges.

A művelet eredményeként létrejött ítélet nyelvi kifejezési formájában rendszerint nyelvi jel jelzi az ítélet összetételének módját, vagyis azt, hogy milyen logikai művelet eredménye az ítélet. Ezért az összetett ítéletek tanulmányozásának egyik lehetséges módja az, hogy kiindulva a különböző nyelvi jelek vizsgálatából, megállapítjuk, melyek az összetett ítéletek jelei, majd visszakövetkeztetünk a jelből a jelzettre, vagyis megállapítjuk az ítélet összetételtípusát. Lényegében ezen az úton haladt a hagyományos logika, a nyelvi formákból kiindulva elvonatkoztatásokkal jutott el a logikai formákhoz. Így megkaphatók az emberi gondolkodásban használt ítéletek logikai formái. A matematikai logika az összetett ítéletek vizsgálatánál más módszert alkalmaz. Egyik fejezete a kijelentéskalkulus,[5] matematikai módszerrel vizsgálja, kiszámítja, hogy milyen lehetséges fajtái vannak az összetett ítéleteknek. A modern logika ugyanis a lehetséges ítéletfajtákat kutatja és ezért nem maradhat meg a meglevő, a köznapi nyelv jeleiben kifejeződő ítéletfajták vizsgálatánál.

A továbbiakban ismertetjük az összetett ítéletek fajtáit. Először azokat, amelyeknek önálló nyelvi kifejezési formájuk van, majd az összetett ítéletek lehetséges fajtáit.

Az összetett ítéleteket alkotó elemi ítéleteket betűjelekkel (p, q, r) helyettesítjük. Ezek a jelek ítéletváltozók, elemi (vagy eleminek tekintett) ítéletformulák jelei. Változók azért, mert helyükbe bármely konkrét tartalmú ítéletet helyettesíthetünk, azzal a kikötéssel, hogy azonos betűk mindig egy és ugyanazt az ítéletet jelölik. $p, q, r \ldots$ elemi ítéletformula, önmagában nem igaz és nem hamis, de felveszi valamelyiket e két logikai érték közül, ha a változók helyébe állandót, valamely konkrét tartalmú ítéletet helyettesítünk.

A tömörebb kifejezés érdekében p, q stb. ítéletről szólva p, q alakú, a formulába helyettesített, valamely konkrét tartalmú, de a vizsgálódás szempontjából nem érdekes, hogy milyen tartalmú ítéletre gondolunk.

A TAGADÁS (NEGÁCIÓ)

Egyetlen ítéletből is képezhetünk új ítéletet úgy, hogy a kapott ítélet igazsága meghatározható az eredeti ítélet igazságértékének ismeretéből. Például „Klári nem tanulta meg a leckét" ítélet tartalmazza a „Klári megtanulta a leckét" ítéletet. Ha igaz a „Klári megtanulta a leckét" ítélet, akkor hamis a „Klári nem tanulta meg a leckét" ítélet. Ha viszont hamis a „Klári megtanulta a leckét" ítélet, akkor igaz a „Klári nem tanulta meg a leckét" ítélet.

Jelöljük a „Klári megtanulta a leckét" ítéletet p, a „Klári nem tanulta meg a leckét" ítéletet $\bar{p}$ jellel. Hogyan fogja meghatározni p igazságértéke a $\bar{p}$ igazságértékét? A p ítélet, mint minden más ítélet, lehet igaz vagy lehet hamis.

Ha p igaz, akkor $\bar{p}$ hamis.

Ha p hamis, akkor $\bar{p}$ igaz.

Ugyanezt felírhatjuk táblázatos formában a következő módon:

p	$\bar{p}$
i	h
h	i

Itt i-vel jelöljük az ítélet igazságát, h-val az ítélet hamis voltát.

A p és $\bar{p}$ formulával jelölt „Klári megtanulta a leckét" és „Klári nem tanulta meg a leckét" ítéletekről elmondottak igazak bármely ítéletpárra, amelyek között fennáll az az összefüggés, hogy az egyik állít valamit, a másik pedig tagadja ezen összefüggés fennállását. Ezért a p és $\bar{p}$ jeleket úgy tekinthetjük, mint olyan változókat, amelyek helyébe bármely két olyan ítéletet helyettesíthetünk, amelyek mint állítás és tagadás viszonyulnak egymáshoz. *A tagadás tehát olyan logikai művelet, amellyel igaz ítéletből hamisat, hamis*

ítéletből igazat képezünk. Valamely ítélet tagadását a tagadott ítélet fölé húzott vonallal fogjuk jelölni. Tehát $\bar{p}$ a p ítélet tagadását jelöli.

EGYESÍTŐ ÍTÉLET (KONJUNKCIÓ)

Tények kapcsolatának egyik esete a tények együttes fennállása. „István rádiót hallgat, és Vera könyvet olvas" ítéletben két tény együttes fennállását állítjuk:

1. „István rádiót hallgat",
2. „Vera könyvet olvas". Az „és" kötőszó nyelvi jele annak, hogy a két tény együttes fennállását állítjuk. Az ítélet csak akkor igaz, ha az 1. és 2. ítélet is igaz. Ha igaz, hogy István rádiót hallgat, de nem igaz, hogy Vera könyvet olvas, vagy fordítva, ha nem igaz, hogy István rádiót hallgat, de igaz, hogy Vera könyvet olvas, akkor nem igaz az „István rádiót hallgat, és Vera könyvet olvas" ítélet. Természetesen nem lesz igaz ez az ítélet akkor sem, ha István nem hallgat rádiót és Vera nem olvas könyvet.

Az egyesítő ítélet (konjunkció) igazságához szükséges és elegendő, hogy az alkotó részeit képező ítéletek mindegyike igaz legyen.

Egyesítő ítélet kifejezésére szolgálhat a magyar nyelvben a „de", „ámbár", „pedig" kötőszó is. „Péter szorgalmas, de Éva szorgalmasabb mint Péter", „A diák vizsgái jól sikerültek, pedig nem tanult sokat" ítéletek szintén akkor igazak, ha az alkotó ítéleteik igazak. Ez nem jelenti azt, hogy nincs különbség az „és", „ámbár", „pedig" kötőszavak jelentése között. A közöttük levő eltérés azonban elhanyagolható, mivel nincs kapcsolatban igazságértékükkel.

Nemcsak két ítéletből lehet egyesítő ítéletet képezni. Vegyük például az alábbi József Attila sorokat:

„Az éjjel hazafelé mentem,
éreztem bársony nesz inog,
a szellőzködő, langy melegben
tapsikoltak a jázminok."

A versszakasz három ítélet „Az éjjel hazafelé mentem",

„éreztem bársony nesz inog", „a szellőzködő, langy melegben tapsikoltak a jázminok" egyesítése, konjunkciója.

A konjunkció műveletét, két ítélet konjunkcióját $p \wedge q$-val jelöljük.

Írjuk fel táblázatos formában, hogyan függ a két ítéletből képzett egyesítő ítélet igazsága az alkotó ítéletek igazságától.

Két ítélet igazságának lehetséges kapcsolatai:

p	q
i	i
i	h
h	i
h	h

A konjunkció igazságtáblázata:

p	q	$p \wedge q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A „VAGY" MINT ÍTÉLETKAPCSOLÓ. SZÉTVÁLASZTÓ ÍTÉLETEK

„A gáz hőmérsékletének emelkedése történhet hő felvétele vagy összenyomás következtében." „Vagy egyenletes mozgást végez a test, vagy gyorsuló mozgást végez." „Az adott háromszög derékszögű, vagy egyik szöge sem 90°." A fenti ítéletek nyelvi formájában közös a „vagy" kötőszó használata, logikai formájában mégis lényeges különbségek vannak. E különbségek alapján három ítélettípust kell megkülönböztetnünk:

A megengedően vagylagos ítélet (diszjunkció):

A megengedően vagylagos ítéletekben tények olyan kapcsolata fejeződik ki, amely tények közül legalább egynek fenn kell állnia. Ezért *a megengedően vagylagos ítélet akkor igaz, ha az alkotó ítéletek közül legalább egy igaz.* A megengedően vagylagos ítélet nem zárja ki azt a lehetőséget, hogy az alkotó ítéletek közül egyszerre több is igaz. Például „A gáz hőmérsékletének emelkedése történhet hő felvétele vagy összenyomás következtében". Ez az ítélet azt állítja, hogy ha a gáz hőmérséklete emelkedik, akkor a két tényező közül valamelyiknek feltétlenül fenn kell állnia, de fennállhat természetesen mind a két tényező is: a gáz hőmérsékletének emelkedését okozhatja egyszerre hő felvétele és összenyomás is. Ugyanígy „A tőkés értéktöbblete a munkaidő meghosszabbításával, vagy a szükséges munkaidő csökkentésével növekedhet" ítélet annak az összefüggésnek a kiemelése, hogy az értéktöbblet növekedéséhez e két tényező valamelyikének fenn kell állnia.

A diszjunkció műveletének jele: $\vee$. Két ítélet diszjunkciója tehát: $p \vee q$. Írjuk fel táblázatos formában, hogyan függ a diszjunkciós ítélet igazsága az alkotó ítéletek igazságától.

p	q	$p \vee q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Kizárás (összeférhetetlenség):

A „vagy" kötőszó más használati módja található pl. a „Vagy te magyarázol nekem, vagy figyelsz arra, amit mondok" ítéletben. Ebben az esetben két tény összeférhetetlenségét állítjuk, azt, hogy a „te magyarázol nekem" és a „figyelsz arra, amit mondok" tények nem állhatnak fenn egyszerre. *A kizáró ítélet akkor is igaz, ha az alkotó ítéletek mindegyike hamis.* Például ha az FTC csapata

mérkőzik az MTK csapatával, igaz az az állítás, hogy „Vagy az FTC csapata győz, vagy az MTK csapata győz". Az ítélet azt állítja, hogy mind a két csapat nem lehet győztes. Igaz, hogy van más lehetőség is. Lehet pl. döntetlen az eredmény, ebben az esetben nem igaz az sem, hogy „az FTC győz", nem igaz az sem, hogy „az MTK győz". De ha mind a két elemi ítélet hamis, attól még igaz marad, hogy a két csapat győzelme összeférhetetlen, tehát vagy az FTC győz, vagy az MTK győz.

Képzeljük el, hogy egy bírósági tárgyaláson a tanú azt vallja, hogy egy másik szobából látta, amint X. Y. az áldozat poharába mérget kevert. Vallomása egy másik részében ugyanez a tanú azt állítja, hogy X. Y. mielőtt a mérget belekeverte az áldozat poharába, teljes sötétséget csinált a szobában. A tanú vallomását a következő ítélettel vonjuk kétségbe: „Vagy sötét volt a szobában, vagy a tanú látta, amint X. Y. mérget kevert a pohárba". Itt a két tény összeférhetetlenségét állítjuk, de lehet mindkét tény hamis is. (A szobában valójában nem volt sötét. A tanú nem látta, amint X. Y. mérget kevert az áldozat poharába.) A „Vagy sötét volt a szobában, vagy a tanú látta, amint X. Y. mérget kevert az áldozat poharába" kizáró ítélet csak akkor hamis, ha van olyan lehetőség, hogy e két tény együtt fennálljon.

A kizáró ítélet akkor hamis, ha az alkotó ítéletek közül egyszerre több is igaz. A kizárás jele: |

Tehát azt, hogy p ítélet kizárja q ítéletet, így jelöljük: $p \mid q$. A kizáró ítélet igazságtáblázata:

p	q	$p \mid q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

Kizáróan vagylagos ítélet (kizáró diszjunkció):

A „vagy" harmadik használati módja, amikor tények kizárását is állítjuk és azt is, hogy e tények közül valamelyik, de csakis az

egyik fennáll. Például „Rabok leszünk vagy szabadok" ítélet két olyan lehetőséget állít, amelyek közül az egyik és csak az egyik állhat fenn. További példa: Az adott háromszög derékszögű, vagy egyik szöge sem 90°-os. A két tény: „Az adott háromszög derékszögű", „Az adott háromszög egyik szöge sem 90°-os" együtt nem állhat fenn, kizárják egymást, ugyanakkor valamelyiknek fenn kell állnia, vagy derékszögű, vagy egyik szöge sem 90°-os, nem lehet mind a kettő hamis.

A kizáró diszjunkció jele: $\triangledown$

Két ítéletből képezett kizáró diszjunkció igazságtáblázata:

p	q	$p \triangledown q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A „HA-AKKOR" ÍTÉLETKAPCSOLAT (IMPLIKÁCIÓ)

A „ha-akkor" nyelvi jel igen különböző állítások kifejezésére szolgálhat. Például „Ha Károly kitűnő eredménnyel vizsgázik, akkor Károly ajándékot kap" mondat jelentheti, hogy az ajándék elnyerése feltételhez van kötve (feltételes ítélet). Kifejezhet a mondat ok-okozati összefüggést a kitűnő eredményre vizsgázás (ok) és az ajándék elnyerése (okozat) között. Akár egyik, akár másik értelme van is ezen mondatnak, mind a két esetben tartalmi összefüggések (ok-okozati kapcsolat, feltételezettség stb.) megállapítása történik. Az ítéletek durvaszerkezetének logikája absztrahál attól, hogy az emberi gondolkodásban a „ha-akkor" nyelvi forma tények közötti milyen tartalmi összefüggés megállapítására szolgál. Kizárólag egy közös oldalát emeli ki a „ha-akkor" nyelvi formában történő állításoknak, nevezetesen tények közötti olyan kapcsolat

állítását, hogy ha valamely tény fennáll, akkor ez elégséges alap egy másik tény fennállásához. Példánk esetében ha fennáll az, hogy Károly kitűnően vizsgázik, akkor ez elegendő alap arra, hogy a „Károly ajándékot kap" tény fennállását is megállapítsuk. Az összetett ítéletnek ezt a fajtáját, amelyben tények fentjelzett kapcsolatát állítjuk, implikációs ítéletnek nevezzük. Az implikációs ítélet logikai képlete: $p \rightarrow q$

Az implikációs ítélet csak egy esetben hamis: ha az ítélet előtagja (antecedens) p igaz és az utótagja (konzekvens) q hamis.

Implikációs ítéletek pl. a következők: „Ha Bécsbe utazom, akkor Ausztriába utazom", „Ha az $f(x) = g(x)$ egyenletnek van gyöke, akkor az $(f(x)^2 = (g(x)^2$ egyenletnek is van gyöke".

Valamely igaz implikációs ítélet nem állítja, hogy az előtag igaz, csak azt, hogy *ha* az előtag igaz, *akkor* az utótag is igaz. A fenti példa esetében: ha igaz, hogy Bécsbe utazom, akkor igaz az is, hogy Ausztriába utazom. Másként megfogalmazva: Nem igaz az, hogy Bécsbe utazom és nem utazom Ausztriába.

A konjunkció és a tagadás jelét használva: $\overline{p \wedge \bar{q}}$

Ha $p \wedge \bar{q}$ eset fennállhatna, akkor hamis lenne a „Ha Bécsbe utazom, akkor Ausztriába utazom" ítélet.

A „Ha Bécsbe utazom, akkor Ausztriába utazom" ítélet akkor is igaz, ha nem utazom Bécsbe, de utazom Ausztriába (valamely más osztrák városba), és igaz akkor is, ha az előtag is hamis és az utótag is hamis (nem utazom Bécsbe, nem utazom Ausztriába).

Fentieknek megfelelően az implikációs ítélet értéktáblázata a következő:

p	q	$p \rightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Az implikációs ítélet nem állítja, hogy q fennállásához szükséges feltétel[6] p fennállása, csak azt, hogy p igazsága elégséges feltétel[7] q igazságához. Például „Ha a benzin kifogyott az autóból, az autó megáll" ítéletben nem állítjuk, hogy az autó megállásának szükséges feltétele, hogy a benzin kifogyjon, csak azt, hogy „az autó megáll" ítélet igazságának elégséges feltétele „a benzin kifogyott az autóból" ítélet igazsága. Az autó megállását előidézheti más körülmény is, q igazságához p elégséges, de nem szükséges feltétel.

Ha azt a tényt akarjuk kifejezni, hogy „az autó megáll" (p) igazsága szükséges feltétele annak, hogy „a benzin kifogyott" (q) ítélet igazságának, vagyis p igazsága szükséges feltétele q-nak, ebben az esetben az implikáció előtagjának kell a q ítéletet venni („Az autó megáll") és az utótagjának a p ítéletet („A benzin kifogyott az autóból"). A „Ha az autó megáll, akkor a benzin kifogyott az autóból" ítélet azt állítja, hogy „az autó megáll" ítélet igazságához szükséges feltétel, hogy „a benzin kifogyott" ítélet igaz legyen. Képletben kifejezve a $q \rightarrow p$ formulát, az ún. fordított implikáció képletét kaptuk.

Fentiekből következően a $p \rightarrow q$ ítéletet az alábbi nyelvi formákban is kifejezhetjük:

p elégséges feltétele q-nak
p csak abban az esetben, ha q (q szükséges p-hez)
p igazságából következik q igazsága.

A $q \rightarrow p$ ítélet kifejezhető az alábbi módokon is:

q elégséges feltétele p-nek
q csak abban az esetben, ha p (p szükséges q-hoz)
q igazságából következik p igazsága.

Az ítéletek durvaszerkezetének logikája kiterjeszti a „ha-akkor" jelentését olyan esetekre is, amikor az a köznapi gondolkodásban nem használatos. Például „Ha Petőfi és József Attila kortársak voltak, akkor Ady és Babits kortársak voltak". „Ha hat maradék nélkül osztható néggyel, akkor hat maradék nélkül osztható öttel" ítéletek a táblázat alapján igaz ítéletek, mégis nehezen elképzelhető, hogy a köznapi gondolkodás ezeket igaz ítéleteknek tartaná. Miért nem? Mert rendszerint csak olyan „ha-akkor" kapcsolatot alkotunk, ahol az előtag és az utótag között tartalmi összefüggés áll

fenn, ahol az alap fennállása vagy mint ok az okozatot, vagy mint a dolog *létrejöttének* feltétele *kiváltja* a következmény fennállását. A $p \rightarrow q$ igaz implikációs ítéletnél p ítélet *igazsága* elégséges feltétele q *igazságának*, de ez nem jelenti, hogy q ítéletben kifejezett ténynek tartalmilag köze lenne a p ítéletben kifejezett tényhez, hogy p *tény létrejöttének* feltétele lenne q tény fennállása. Pl. „Ha tíz maradék nélkül osztható öttel, akkor Budapest Magyarország fővárosa" igaz implikáció (igaz az előtag és igaz az utótag is), de a valóságban annak, hogy „Budapest Magyarország fővárosa", vajmi kevés kapcsolata van azzal, hogy „tíz maradék nélkül osztható öttel". Tehát van olyan igaz implikáció, amelynek objektív alapja nem tények közötti feltételezettség, viszont a tények közötti feltételezettség absztrakt formában (ennek bizonyos sajátosságát kiemelve) kifejezhető igaz implikációs ítélettel. Az implikáció tehát alkalmas a dolgok közötti feltételezettség kifejezésére, de absztrakt formában nem minden oldalról, nem kimerítően írja azt le.

Az ún. nem klasszikus matematikai logikákban kísérletek folynak olyan logikai rendszerek létrehozására, amelyek közelebb vannak a köznapi gondolkodáshoz a „ha-akkor" nyelvi forma gondolati tartalmának megragadásában. Próbálkoznak olyan felépítéssel, amellyel az igaz implikációk közül ki lehet szűrni azokat az eseteket, amikor az implikáció elő- és utótagja között nincs tartalmuk alapján kapcsolat. Így pl. C. J. Lewis megkülönbözteti az általunk ismertetett implikációtól (materiális implikáció) a szigorú implikációt. A szigorú implikáció csak akkor igaz, ha az előtag igazságából *szükségszerűen* következik az utótag igazsága.

„Ha p, akkor szükségszerű, hogy q". Jele: $p \prec q$. Így az az ítélet, hogy „Ha kétszer kettő négy, akkor New York nagy város", amely igaz ítélet a materiális implikáció értelmében, a szigorú implikáció értelmében már nem igaz, hiszen nem állítható, hogy „Ha kétszer kettő négy, akkor szükségszerű, hogy New York nagy város" ítélet megfelel a valóságnak. A példából az is világos, hogy a szigorú implikáció igazságának megállapításához nem elegendő egyedül az implikációt alkotó elemi ítéletek igazságértékének ismerete.

AZ EKVIVALENCIA

Az ekvivalencia leggyakoribb nyelvi kifejezési formája: „Ha p, akkor és csak akkor q". Jele: $p \leftrightarrow q$.

Ez az ítélet azt állítja, hogy p akkor igaz, amikor q is igaz, akkor hamis, amikor q hamis. Vagyis q igazságának szükséges és elégséges feltétele p igazsága. Például „Akkor és csak akkor hegyesszögű a háromszög, ha szögei 90°-nál kisebbek". „Ha ma a Nemzetiben a Hamletet játsszák, akkor és csak akkor Péter ma színházba megy."

Az ekvivalencia akkor igaz, ha az alkotó ítéletek igazságértéke azonos, megegyező. Táblázatos formában:

p	q	$p \leftrightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

GYAKORLATOK:

1. Állapítsuk meg az alábbi mondatokról, kifejeznek-e ítéletet:
   Lenni vagy nem lenni?
   Kihajolni veszélyes!
   A tanulás: út a tudáshoz.
   Nem a ruha teszi az embert.
   Ne az embert nézd, hanem a munkáját!

2. Milyen hatással van a nyelvi forma szabályainak megsértése a gondolati tartalom kifejezésére az alábbi ítéletekben?
   Csernisevszkij regényt írt az orosz demokratikus értelmiség helyzetéről a börtönben.
   József Attila apja hároméves korában kivándorolt.

3. Az alábbi ítéletek közül válasszuk ki az összetett ítéleteket, állapítsuk meg az elemi ítéletek számát:
   Tamás megfázott, mert hideg vizett ivott.

A tőke szerves összetétele lehet alacsony vagy magas.
Megy az eke, szaporodik a barázda.

Egyszer egy bús éjféltájon,
míg borongtam zsongva, fájón,
s furcsa könyvek altatgattak,
holt mesékből vén bazár,
lankadt főm már le-ledobban,
mikor im valami koppant,
künn az ajtón, mintha roppant
halkan roppanna a zár.

(E. A. Poe: A holló)

4. Állapítsuk meg az alábbi ítéletekről, milyen típusú összetett ítéletek

Hideg van, és esik az eső.
Hideg van, de nem fúj a szél.
Vagy esik az eső, vagy tovább tart a szárazság.
Akkor és csak akkor látogatlak meg, ha te is akarod.
A gyilkos vagy János, vagy Péter volt. (Más nem lehetett.)
Ha holnap esik a hó, akkor Jóska sielni megy.

5. Írjuk fel a fenti ítéletek logikai képletét.

1.3. AZ ÖSSZETETT ÍTÉLETEK ÖSSZES LEHETSÉGES FAJTÁIRÓL

Írjuk fel közös táblázatba az eddig megismert összetett ítélet fajtákat:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \mid q$	$p \triangledown q$	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
i	i	i	i	h	h	i	i	i
i	h	h	i	i	i	h	i	h
h	i	h	i	i	i	i	h	h
h	h	h	h	i	h	i	i	i

Ezen ítélettípusok vizsgálatánál a köznyelvből indultunk ki, a köznyelvi formákból jutottunk el a gondolatformákhoz. Válasszunk most más utat, azt az utat, amelyet a kijelentéskalkulusban követ a modern logika.

A kérdés itt úgy merül fel, vajon hány különböző igazság megoszlású ítélet képezhető két ítéletből, hány különböző igazság megoszlású két ítéletből képezett összetett ítélet lehetséges?

Egy kis matematikai számítás után világos, hogy mivel két ítélet igazságértéke négyféle módon kapcsolódhat egymáshoz, a két ítéletből képezhető összetett ítéletek száma 16. Ábrázoljuk a 16 különböző lehetőséget egy táblázatban:

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
i	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*
i	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*
h	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*

A táblázatban természetesen helyet kapnak az általunk már tárgyalt összetett ítéletek, de ezek csak 7 oszlopot tesznek ki. Mi a sajátossága a többi 9, eddig még nem tárgyalt ítélettípusnak?

Nézzük sorjában az oszlopokat:

1. oszlop: olyan, két ítéletből képezett ítélet, mely függetlenül az alkotó ítéletek igazságértékétől, mindig-igaz ítélet. Az ilyen ítéletet *tautológiának* nevezzük.

A tautologikus ítéleteknek nincs speciális nyelvi kifejezési formájuk. Tautologikus ítélet pl.: „Ha élünk, akkor élünk, és ha meghalunk, akkor meghalunk." $(p \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow q)$

2. oszlop: a már tárgyalt diszjunkció.

3. oszlop: fordított implikáció.

4. oszlop: olyan, két ítéletből képezett ítélet, amelynek igazsága p igazságértékével megegyezik. Mivel az ezen ítéletformának megfelelő ítéletet a gondolkodásban egyszerűbb formában

szoktuk kifejezni (magával a *p* ítélettel), ezért ennek az ítélettípusnak nincs külön nyelvi kifejezési formája.

5. oszlop: implikáció.

6. oszlop: hasonlóan a négyes oszlophoz, olyan ítélet, amely ugyan két ítéletből összetett, de igazságértéke az egyik ítélet (jelen esetben a *q* ítélet) igazságértékével megegyezik.

7. oszlop: ekvivalencia.

8. oszlop: konjunkció.

A 9-től a 16-ig terjedő oszlopban szereplő ítélettípusok tagadott ítéletpárjai az első nyolc ítélet valamelyikének. Így a 9-es oszlop tagadása a nyolcasnak, a tízes a hetesnek, a tizenegyes a hatosnak stb. Az itt szereplő eddig említett típusokon kívül (kizárás a 9. oszlop, kizáró diszjunkció a 10. oszlop) érdemes külön megemlíteni a 15. oszlopban szereplő ítélettípust, az ún. „sem-sem" formájú ítéletet. Jele: ($p \downarrow q$ = sem *p*, sem *q*). Ez az ítélet a diszjunkciós ítélet tagadása. Míg a diszjunkció azt állítja, hogy bizonyos tények között olyan kapcsolat van, hogy az egyiknek fenn kell állnia, addig ez az ítélet annak állítása, hogy két tény közül egyik sem áll fenn. Például a „Vagy Babits, vagy Kosztolányi írta az »Április« című verset" diszjunkciós ítélet tagadását („Nem igaz az, hogy vagy Babits, vagy Kosztolányi írta az »Április« c. verset") így fejezhetjük ki: „Sem Babits, sem Kosztolányi nem írta az »Április« c. verset".

Ezzel áttekintettük a két ítéletből képezhető valamennyi ítélettípust. Írjuk most fel táblázatos formában a két ítéletből logikai művelettel képezett 16 ítélet igazságtáblázatát:

p	q	$\uparrow$	$p \vee q$	$q \rightarrow p$	p	$p \rightarrow q$	q	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	$\bar{q}$	$\overline{p \rightarrow q}$	$\bar{p}$	$\overline{q \rightarrow p}$	$p \mid q$	$\downarrow$
i	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*
i	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*
h	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*h*

Ha két ítélet összekapcsolásából új ítéletet képezünk úgy, hogy a kapott új ítélet igazsága kizárólag az eredeti ítéletek igazságától függjön, akkor az új ítélet igazságérték megoszlása a tizenhat különböző ítélettípus valamelyikének felel meg. E 16 ítélettípus közül a gyakran használt ítélettípusok a következők:

diszjunkció: $p \vee q$
konjunkció: $p \wedge q$
implikáció: $p \rightarrow q$
ekvivalencia: $p \leftrightarrow q$[8, 9]

és ezen ítéletek tagadásai.

Milyen ítélettípusok képezhetők 3, 4, 5...*n* ítéletből logikai művelet segítségével? Nincs akadálya a kérdés megválaszolásának. Három ítélet igazságértéke nyolc módon kapcsolódhat egymáshoz.

p	*q*	*r*
i	*i*	*i*
i	*i*	*h*
i	*h*	*i*
i	*h*	*h*
h	*i*	*i*
h	*i*	*h*
h	*h*	*i*
h	*h*	*h*

A három ítélet kapcsolatából 256 különböző igazságérték megoszlású ítélet állítható elő. „n" ítélet igazságértéke 2^n módon kapcsolódhat egymáshoz. (Három ítélet 2^3, négy ítélet 2^4 stb. módon kapcsolódhat egymáshoz.) Az „n" ítélet kapcsolatából képezhető

új ítéletek száma $2^{(2^n)}$. Nincs azonban szükség arra, hogy a három (vagy n) számú ítéletből képzett új ítélettípusok felírására új jeleket, új nyelvi kifejezéseket vezessünk be. Ezeket az ítélettípusokat ki tudjuk fejezni a két ítéleten végzett logikai műveletek eredményeként kapott ítéletkapcsolatok nyelvi jeleivel. Így pl. „Ha Jóska Kőbányán dolgozik, és a Nyúl utcában lakik vagy a Fillér utcában lakik, akkor Jóska lakása távol van a munkahelyétől" ítéletben 4 elemi ítélet szerepel, de fel tudjuk írni ezt az ítéletet is az eddig megismert ítéletkapcsolatokkal: $[p \wedge (q \vee r)] \rightarrow z$. Bebizonyítható, hogy bármely akárhány ítéletből összetett ítéletet, ha ismert az igazságtáblázata, kifejezhetünk konjunkció, diszjunkció és negáció segítségével. Ennek igazolására ragadjunk ki találomra egyet a három ítéletből képezett ítéletek 256 lehetséges esete közül. Nevezzük ezt el (természetesen teljesen önkényesen) 127-es ítéletnek.

p	q	r		127
i	i	i		i
i	i	h		h
i	h	i		h
i	h	h		h
h	i	i		h
h	i	h		h
h	h	i		h
h	h	h		i

Milyen típusú lesz ez a 127-esnek elnevezett ítélet? Olyan, amely akkor igaz, amikor p és q és r is igaz, vagy p és q és r is hamis. De ezzel már ki is mondtuk azt a konjunkciókból, diszjunkciókból és negációkból álló ítéletet, amellyel kifejezhetjük a 127-es ítélet-

típust! Nem kell mást tennünk, csak formalizálni azt az ítéletet, amely meghatározza a 127-es ítélet igazságértékét. Tehát a „p és q és r, vagy nem p és nem q és nem r" ítéletnek megfelel:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}).$$

Ez a formula akkor és csak akkor igaz, ha p, q, r igazság megoszlása a 127-es oszlopnak felel meg.

Nyilvánvaló, hogy a 256 vagy az n számú ítélet bármelyikét a fenti eljáráshoz hasonlóan ki tudnánk fejezni konjunkció, diszjunkció és negáció segítségével. Eljárásunk a következő: kikeressük a táblázatban azokat a helyeket, ahol a formula az igaz értéket veszi fel. Megnézzük, hogy az adott esetben (tehát amikor a formula az igaz értéket veszi fel) milyen az alkotó ítéletek igazságértéke. Igaz elemi ítélet esetén magát az ítéletet, hamis ítéletnél a negációját vesszük, és így képezzük az elemi ítéletek konjunkcióját. Végül az egyes igaz sorokra kapott konjunkciókat diszjunkcióval kötjük össze, mivel a formula igazsága esetén a konjunkciók valamelyikének igaznak kell lennie.

Természetesen ki lehet fejezni bármelyik két elemi ítéletből képezett ítéletet is a fenti eljárással, vagyis konjunkció, diszjunkció és negáció felhasználásával. Hogyan fejezhetjük ki pl. a $p \leftrightarrow q$ ítéletet? Írjuk fel ehhez először is az értéktáblázatát:

p	q	$p \leftrightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Mikor igaz az ekvivalencia? Ha p igaz és q igaz, vagy p hamis és q hamis. Tehát $(p \leftrightarrow q) = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$. Ez utóbbi (az azonosság bal oldalán álló formula) a $p \leftrightarrow q$ formula ún. diszjunktív normálformája. (Diszjunktív normálforma meghatározását l. 72. old.)

Természetesen törekedni kell a legegyszerűbb (legrövidebb, legtömörebb) kifejezésmódot megtalálni. Nehezen képzelhető el, hogy bárki $p \vee q$ állítást a vele azonos igazságértékű $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ diszjunktív normálformában közölné, de azért a kifejezhetőség tényére fel kell figyelnünk abból a szempontból, hogy maga az „ítéletfajta" elnevezés problematikus, viszonylagos jellegű. Ezzel a problémával még foglalkozunk a következőkben. (69. old.)

GYAKORLATOK:

6. Írjuk fel szimbolikus formában az itt következő ítéleteket. A „Bodri hűséges" ítéletet jelöljük p-vel, a „Hektor hűséges" ítéletet q-val.

Bodri hűséges és Hektor hűséges.
Bodri hűtlen és Hektor hűséges.
Ha Bodri hűtlen, akkor Hektor is az.
Sem Bodri, sem Hektor nem hűtlen.
Sem Hektor, sem Bodri nem hűséges.
Nem igaz, hogy Bodri és Hektor hűséges.
Bodri hűséges, de Hektor hűtlen.
Vagy Bodri hűtlen, vagy Hektor hűtlen (valamelyikük hűtlen).
Nem igaz, hogy ha Bodri hűséges, akkor Hektor hűtlen.

(Fentiekben a „hűtlen" jelentése „nem-hűséges".)

7. Ha feltételezzük, hogy Bodri és Hektor is hűséges, akkor az előző feladatban szereplő ítéletek közül melyik igaz, melyik hamis?

8. Ha p azt jelenti, hogy „Ma meleg van", és q azt, hogy a „A hőmérséklet emelkedik", akkor milyen ítéletek kifejezései a következő formulák:

a) $p \rightarrow q$
b) $p \wedge q$
c) $p \mid\mid q$
d) $p \mid q$
e) $\bar{p} \vee \bar{q}$
f) $\bar{p} \triangledown q$

9. Jelölje p a „Nekem van kutyám" ítéletet, a q „Nekem van macskám" ítéletet. Mit jelent ez esetben a következő formula:

$$(p \vee q) \wedge \bar{p}$$

10. Jelöljük a „János elhalasztotta a vizsgáit" ítéletet p-vel, a „Béla elhalasztotta a vizsgáit" ítéletet q-val. Hogyan írható fel szimbolikus formában a következő ítélet: „Nem igaz, hogy János is és Béla is elhalasztotta a vizsgáit."

Mely esetben igaz ez az ítélet? (Készítsük el az igazságértéktáblázatát! Fejezzük ki egyszerűbb formában a fenti ítéletet.)

11. Írjuk fel azt az ítéletet, amely megfelel az alábbi igazságmegoszlásnak:

p	q	r			
i	i	i		i	
i	i	h		h	
i	h	i		i	
i	h	h		h	
h	i	i		h	
h	i	h		h	
h	h	i		i	
h	h	h		h	

12. Állapítsuk meg a következő ítéletek alkotórészeit és írjuk fel a következő 3—4 ítéletből összetett ítéletnek megfelelő logikai formulát:

Ha meghalunk, hát meghalunk,
S ha meghalunk, meghal itt minden.
(Ady)

Ha odasújtsz körül a sorshoz,
az úri pusztaság rikoltoz —
a széles fejsze mosolyog.
(József A.)

Kit anya szült, az mind csalódik végül,
vagy így, vagy úgy, hogy maga próbál csalni.
(József A.)

Eldobtam egy gyufát s legott
hetyke lobogásba fogott,
Lábhegyre állt a kis nyulánk,
Hegyes sipkájú sárga láng...
(Tóth Á.)

Falu végén kurta kocsma,
Oda rúg ki a Szamosra,
Meg is látná magát benne,
Ha az éj nem közeledne.
(Petőfi S.)

13. Készítsük el a következő formulák értéktáblázatát:

$$p \rightarrow (q \vee r)$$
$$(p \vee r) \wedge (p \rightarrow q)$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee r)$$

1.4. AZ ÍTÉLETEK KÖZÖTTI VISZONYOK

Az ítéletek közötti viszonyokat vizsgálva arra a kérdésre keresünk választ, hogy logikailag hogyan függ és függ-e egyáltalán valamely ítélet igazsága vagy hamissága más ítéletek igazságától, illetve hamisságától.

Az ítéletek közötti viszonyok vizsgálatánál el fogunk vonatkoztatni az ítéletek konkrét tartalmától és csupán az ítéletek igazságértékét vesszük figyelembe.[10]

Milyen viszonyban lehet két ítélet igazságértéke egymással? Két ítélet *függetlenségi* viszonyban van egymással, ha *p* ítélet igazsága esetén *q* ítélet lehet igaz is és hamis is, és megfordítva, *q* ítélet igazsága esetén *p* ítélet lehet igaz is és hamis is. Vagyis ha a következő esetek mindegyike lehetséges:

i—i (mindkettő igaz)
i—h (*p* igaz, *q* hamis)
h—i (*p* hamis, *q* igaz)
h—h (*p* hamis, *q* hamis)

A *p* és *q* ítélet függőségi viszonyban van egymással, ha a négy fenti lehetőség közül legalább egy nem áll fenn.

A függőségi viszony különböző formái:

Viszony megnevezése	Jelentés	Nem lehet	
		p	*q*
Ellentétes	nem lehet mindkettő igaz	*i—i*	
Alárendelt ellentétes	nem lehet mindkettő hamis	*h—h*	
Alárendelt	nem lehet az alárendelt (*p*) hamissága esetén az alárendelő (*q*) igaz	*h—i*	
Fölérendelt	nem lehet a fölérendelt (*p*) igazsága esetén az alárendelt (*q*) hamis	*i—h*	
Azonosság	nem lehet *p* igazsága esetén *q* hamis és *p* hamissága esetén *q* igaz	*i—h* és *h—i*	
Ellentmondó	nem lehet mindkettő igaz és mindkettő hamis	*i—i* és *h—h*	

Két vagy több összetett ítélet közötti viszony megállapításának módszere a következő: Elkészítjük az ítéletek értéktáblázatát. Megnézzük, melyik igazságérték-kapcsolat nem szerepel az ítéletek között és ennek alapján megállapítjuk az ítéletek közötti viszonyt. Így tehát van olyan eljárás, amellyel bármely, két vagy több összetett ítéletről tisztán formai úton, mechanikus eljárással megállapíthatjuk, milyen viszony van igazságértékeik között.

Milyen viszony van pl. $p \vee q$ és $q \rightarrow p$ ítéletek között? Értéktáblázatuk szerint

p	q	$p \vee q$	$q \rightarrow p$
i	i	i	i
i	h	i	i
h	i	i	h
h	h	h	i

nem lehet mindkettő hamis, tehát a két ítélet között alárendelt ellentétességi viszony áll fenn.

Milyen viszony van $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \vee z)]$, valamint $[(p \vee z) \wedge (p \leftrightarrow q)]$ ítéletek között?

Készítsük el értéktáblázatukat:

(A táblázatot lásd a következő oldalon.)

p	q	z	$[(p \leftrightarrow q) \vee (p \vee z)]$			$[(p \vee z) \wedge (p \leftrightarrow q)]$		
i	i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	i	i	i	i	i
i	h	i	h	i	i	i	h	h
i	h	h	h	i	i	i	h	h
h	i	i	h	i	i	i	h	h
h	i	h	h	h	h	h	h	h
h	h	i	i	i	i	i	i	i
h	h	h	i	i	h	h	h	i

A táblázatról leolvasható, hogy van olyan eset, amikor mindkét ítélet igaz, és van olyan eset is, amikor mindkét ítélet hamis. Előfordul az is, hogy a második ítélet hamis akkor is, amikor az első igaz. Ezért ez az ítélet fölérendelt ítélete a $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \vee z)]$ ítéletnek.

Az ítéletek közötti viszonyok közül további vizsgálódásaink szempontjából különösen jelentős az *azonosság* viszonya.

Két ítélet között, mint tudjuk, akkor áll fenn azonossági viszony, ha mindazokban az esetekben, amikor igaz az egyik ítélet, igaz a másik, és fordítva, amikor hamis az egyik, hamis a másik is, vagyis azonos a logikai értékük. Azonosság tehát az ítéleteknek csupán az igazságértékében áll fenn, de nem azonosak ezek az ítéletek más szempontból (pl. az egyik ítélet diszjunkciós, a másik konjunkciós ítélettípus, más-más logikai viszonyok kifejezői stb.).

GYAKORLATOK:

14. Helyesen állapítottuk-e meg a következő ítéletek ellentmondó ítéletpárját? Javítsuk ki az esetleges hibákat; táblázatos módszerrel igazoljuk a tagadás helyességét:

a) Vagy Zsuzsa, vagy Mari nyeri meg a bajnokságot. (Kizáró diszjunkció.)

A bajnokságot sem Zsuzsa, sem Mari nem nyeri meg.

b) Kolumbusz felfedezte Amerikát, és Magellán tette meg az első világkörüli utat.

Vagy Kolumbusz nem fedezte fel Amerikát, vagy nem Magellán tette meg az első világkörüli utat.

c) Vagy 8-kor elindul Péter, vagy elkésik. (Megengedő diszjunkció.) Péter 8-kor elindul és elkésik.

15. Tagadjuk a következő ítéleteket:

a) Ha az aranytermelő munka termelékenysége kétszeresére nő, az „*A*" áru ára emelkedik.

b) Ha egy termelő hosszabb idő alatt állítja elő áruját mint a többiek, áruja értéke nem lesz nagyobb.

16. Állapítsuk meg, milyen viszony van *A* és *B* ítéletpárok között?

A	*B*
$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
q	$p \rightarrow q$
$p \leftrightarrow q$	$p \bigtriangledown q$

17. Írjuk fel a következő igaz ítéletek ellentmondó ítéletpárjait:

a) Vagy beszüntetik az atomfegyver-kísérleteket, vagy komoly veszély fenyegeti a világot.

b) Ha a testre ható erők eredője nulla, a mozgás sebessége nem változik.

18. Állapítsuk meg, milyen viszony van a következő ítéletek között:

a) $p \wedge \bar{q}$

b) $\overline{\bar{p} \vee q}$

19. Melyik három ítélet lehet egyszerre igaz az alábbi ítéletek közül?

Juli levizsgázik kémiából, de nem vizsgázott matematikából.
Juli akkor és csak akkor vizsgázik le kémiából, ha levizsgázott matematikából.
Nem igaz, hogy Juli levizsgázik kémiából és levizsgázott matematikából.
Juli nem vizsgázik kémiából és nem vizsgázott le matematikából.
Nem igaz, hogy Juli levizsgázik kémiából vagy nem vizsgázott le matematikából.

1.5. AZONOSSÁGOK

ARITMETIKAI AZONOSSÁGOK

Bizonyos aritmetikai azonosságoknak megfelelő azonosságokra már a matematikai logika fejlődésének kezdeti szakaszában (Leibniz, Boole) felfigyeltek. E szerint logikai műveletek (konjunkció, diszjunkció) kapcsolatba hozhatók számtani műveletekkel (összeadás, szorzás). Továbbá a számtani műveletek törvényei és a logikai műveletek törvényei között is analógiák teremthetők. Így pl. az algebrai kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás megfeleltethető bizonyos logikai azonosságoknak.

KOMMUTATIVITÁS

Hasonlóan ahhoz, hogy $3+4 = 4+3$, továbbá $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$, a diszjunkciós, illetve a konjunkciós tagok sorrendje is felcserélhető.

$$p \wedge q = q \wedge p^{11}$$
$$p \vee q = q \vee p$$

ASSZOCIATIVITÁS

$(3+4)+2 = 3+(4+2)$, $(3\cdot4)2 = 3(4\cdot2)$ azonosságoknak megfelelően érvényes:

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

DISZTRIBUTIVITÁS

$(3+2)4 = (3\cdot4)+(2\cdot4)$ aritmetikai azonossághoz hasonlóan érvényes:

$$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)^{12}$$
$$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Például az az állítás, hogy „Ma színházba megyek és szerdán felhívlak telefonon, vagy csütörtökön meglátogatlak", azonos a „Ma színházba megyek és szerdán felhívlak telefonon, vagy ma színházba megyek és csütörtökön meglátogatlak" ítélettel. Továbbá az „Ezen a héten vagy filozófiatörténet, vagy dialektikus materializmus szeminárium van és politikai gazdaságtan szeminárium is van" ítélet azonos az „Ezen a héten filozófiatörténet szeminárium és politikai gazdaságtan szeminárium vagy dialektikus materializmus és politikai gazdaságtan szeminárium van" ítélettel.

IDEMPOTENCIA AZONOSSÁGOK

Az idempotencia azonosságok az algebra azonosságaitól eltérő azonosságok. Míg az algebrában $a+a = 2a$, $a\cdot a = a^2$, a logikában:

$$p \wedge p = p$$
$$p \vee p = p$$

Vagyis egy ítélet igazságán nem változtat, ha azt önmagával konjugáljuk, illetve diszjungáljuk. (Ismételjük, ezek az azonosságok *csak* az *ítéletek igazságértéke közötti azonosságok*. Az az állítás, hogy „Szeretném, ha szeretnének, s lennék valakié, s lennék valakié" ugyanakkor igaz, amikor igaz az, hogy „Szeretném, ha szeretnének s lennék valakié". Más szempontból azonban — pl. érzelmi kifejezés, költői kép stb. szempontjából — nem azonos a két kijelentés. De a logikai vizsgálódásban az ítéletnek ettől a tartalmától elvonatkoztatunk.)

NEGÁCIÓS AZONOSSÁGOK

A negációs azonosságok az egyes ítélettípusok definíciói alapján könnyen beláthatók. Például $p \wedge \bar{p}$ nem lehet igaz, hiszen a konjunkció csak akkor igaz, ha minden tagja igaz. p és $\bar{p}$ közül viszont az egyik feltétlenül hamis.

$$p \wedge \bar{p} = h$$
$$p \vee \bar{p} = i$$
$$p \to \bar{p} = \bar{p}$$
$$\bar{p} \to p = p$$
$$\bar{\bar{p}} = p$$

KISZÁMÍTÁSI AZONOSSÁGOK

A kiszámítási azonosságok érvényessége belátható, ha visszagondolunk a konjunkció, diszjunkció, implikáció meghatározására. Például a konjunkció csak akkor igaz, ha minden tagja igaz. Ha p és q konjunkciójából p-ről tudom, hogy hamis, akkor nyilvánvaló, hogy ez a tag hamissá teszi a konjunkciós ítélet egészét is.

Továbbá ha tudott, hogy p igaz, akkor a konjunkció igazsága már csak attól függ, hogy a konjunkció többi tagjainak igaz vagy hamis az értéke.

$$p \wedge i = p \qquad p \vee i = i$$
$$p \wedge h = h \qquad p \vee h = p$$

$$p \to i = i$$
$$p \to h = \bar{p}$$
$$i \to p = p$$
$$h \to p = i$$
$$p \to p = i$$

ABSZORBCIÓS AZONOSSÁGOK

Az abszorbciós azonosságok felhasználásával, a formulában szereplő változók számának csökkentésével rövidíthetők a kifejezések.

$$p \wedge (q \vee p) = p \qquad p \wedge (\bar{p} \vee q) = p \wedge q$$
$$p \vee (q \wedge p) = p \qquad p \vee (\bar{p} \wedge q) = p \vee q$$

DE-MORGAN AZONOSSÁGOK

$$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$$

Például „Nem igaz az, hogy ez a háromszög egyenlő szárú és derékszögű" = „Ez a háromszög nem egyenlő szárú vagy nem derékszögű".

$$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$$

Például „Nem igaz az, hogy ez a háromszög vagy derékszögű, vagy egyenlő oldalú" = „Ez a háromszög nem derékszögű és nem egyenlő oldalú".

$$\overline{p \to q} = p \wedge \bar{q}$$

Például „Nem igaz, hogy ha ez a háromszög derékszögű, akkor egyenlő oldalú" = „Ez a háromszög derékszögű és nem egyenlő oldalú".

A fent tárgyalt De-Morgan azonosságokból indulunk ki. Például mivel a $\overline{p \wedge q}$ azonos $\bar{p} \vee \bar{q}$-val, következik, hogy $p \wedge q$ azonos $\overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$-val.

Ha $p \wedge q$ azonos $p \to \bar{q}$-val, ebből következik, hogy

$p \wedge q$ azonos $\overline{p \to \bar{q}}$-val, továbbá

$p \vee q = \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}} = \bar{p} \to q$

$p \to q = \overline{\bar{p} \vee q} = \overline{p \wedge \bar{q}}$

$p \leftrightarrow q = [(p \to q) \wedge (q \to p)] = [(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p)] =$

$= [(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})].$

A leggyakrabban előforduló kifejezési azonosságok táblázatosan a következő módon ábrázolhatók:

	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
konjunkcióval és negációval		$\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$	$\overline{p \wedge \bar{q}}$
diszjunkcióval és negációval	$\overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$		$\bar{p} \vee q$
implikációval és negációval	$\overline{p \to \bar{q}}$	$\bar{p} \to q$	

GYAKORLATOK:

20. Igazoljuk táblázatos módszerrel a következő azonosságokat:

$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$p \to \bar{p} = \bar{p}$

$\overline{\bar{p} \vee \bar{q}} = \bar{p} \wedge \bar{q}$

$\overline{p \to q} = p \wedge \bar{q}$

Az igazolás módja a következő. Először kiszámítjuk az egyenlőség egyik oldalán szereplő formula értékeit, majd az egyenlőség

másik oldalán szereplő formula értékeit. Ha az igazságértékek minden sorban megegyeznek, az egyenlőség valóban fennáll.

Például $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
i	i	i	i	i
i	i	h	i	h
i	h	i	i	i
i	h	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	h	i	h
h	h	i	h	h
h	h	h	h	h

$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
i	i	i
h	h	h
i	h	i
h	h	h
h	i	i
h	h	h
h	h	h
h	h	h

$(p \vee q) \wedge r$	$=$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
i		i
h		h
i		i
h		h
i		i
h		h
h		h
h		h

21. Keressük meg a 16 kétváltozós művelet közül, hogy az alábbi formulák melyik igazságérték-megoszlásnak felelnek meg, mely ítélettel azonosak?

$$\begin{array}{l}(p \wedge \bar{p}) \wedge (p \wedge \bar{q}) \\ (p \vee q) \vee \bar{p} \\ \hline (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})\end{array}$$

22. Állapítsuk meg a következő formula értéktáblázatát

$$(p|q)|(p\ q)$$

(Melyik logikai alapművelet értéktáblázatával azonos?)

23. Állapítsuk meg, azonosak-e a következő ítéletek:

a) Ha Péter nincs a szobában, akkor vagy a kertben van, vagy sétál.

b) Vagy a szobában van Péter, vagy ha nem a kertben van, akkor sétál.

c) Nem igaz az, hogy Péter nincs a szobában, nincs a kertben és nem is sétál.

(A „vagy" minden esetben megengedő diszjunkció.)

24. Hozzuk egyszerűbb alakra az idempotencia azonosságok alkalmazásával a következő formulákat. (Kevesebb elemi ítéletet tartalmazzanak.)

$$\begin{array}{l}(p \rightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) \\ (p \bigtriangledown q) \wedge (p \wedge p)\end{array}$$

25. Állapítsuk meg a negációs azonosságok alkalmazásával az alábbi formulák igazságértékét:

$$\begin{array}{l}(p \wedge \bar{p}) \vee (q \vee \bar{q}) \\ (\bar{p} \rightarrow p) \vee \bar{p} \\ (p \rightarrow \bar{p})|p\end{array}$$

26. Számítsuk ki, mivel egyenlő a következő kifejezések értéke.

$$\bar{p} \wedge i$$
$$p \rightarrow h$$
$$p \wedge [(p \vee \bar{p})]$$
$$p \rightarrow (p \vee q \vee \bar{q})$$

27. Alkalmazzuk a tanult azonosságokat mindaddig, míg $[(p \vee q) \wedge (q \vee r)] \wedge p$ formulából $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{r} \wedge \bar{q}) \vee p$ formulához jutunk.

28. Milyen azonosságokat alkalmaztunk a következő esetekben?

$$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{q} \wedge \bar{r}) \vee p = (p \vee \bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{p} \vee \bar{r}) \wedge \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r})$$
$$(p \vee \bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{p} \vee \bar{r}) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) = = p \vee \bar{q}$$

1.6. AZ ÍTÉLETFAJTÁK ABSZTRAKTSÁGÁRÓL ÉS VISZONYLAGOSSÁGÁRÓL

Felsoroltuk az összetett ítéletek különböző fajtáit. De mint a fentiekben láttuk, ezek az elhatárolások csak bizonyos vonatkozásban érvényesek, hiszen ugyanazt az igazságtartalmat kifejezhetjük más és más módon. Igazságérték szempontjából $p \leftrightarrow q$ azonos a $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$ ítélettel, a $p \vee q$ ítélettel azonos igazságértékű a $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ diszjunktív normálalak. De azonosak-e minden szempontból? Nem azonosak pl. annyiban, hogy egyik forma a másikból *csak logikai művelettel kapható meg*. Nem azonosak abban sem, hogy más és más valóságbeli összefüggéseket fejeznek ki. Például a $p \vee q$ ítélet két tény olyan kapcsolatát fejezi ki, hogy közülük legalább az egyiknek fenn kell állni az ítélet igazsága esetén, ezzel szemben a vele igazságérték szempontjából azonos $\bar{p} \wedge \bar{q}$ ítélet nem p, q tények kapcsolatát, hanem $\bar{p}$, $\bar{q}$ tények kapcsolatát állapítja meg, azt, hogy e tények nem állhatnak fenn együttesen. Ezért ezek az ítéletformulák bizo-

nyos vonatkozásban azonosak, másban különbözők. Az ítéletfajtáknak az az elhatárolása, amellyel megismerkedtünk, az ítéletek igazságérték szerinti elhatárolása. Ez szükségképpen csak bizonyos oldaláról különbözteti meg és bizonyos vonatkozásban azonosítja az ítéleteket.

Az implikáció esetében világosan látható volt, hogy ez a köznapi gondolkodás egy a valóság összefüggését tükröző gondolatformáját, ítélettípusát általánosítja, kiterjeszti. Vagyis az implikációban egy gondolatforma értelmezve van az olyan esetekre is (pl. amikor az előtag és az utótag is hamis), amely esetekben a köznapi gondolkodás nem használja. Lényegében ugyanez történik a többi ítélettípus esetében is. A konjunkció, diszjunkció stb. esetében is kiterjesztjük ezek értelmét. A diszjunkció esetében pl. bármely tartalmú hamis és bármely tartalmú igaz ítéletből képezhető igaz diszjunkciós ítélet. De kevés a valószínűsége, hogy pl. valamikor, a megismerés gyakorlati szükségletéből következőleg a „kétszer kettő egyenlő öttel, vagy New York nagy város" ítélet megalkotására szükség lenne. Az ember csak olyan diszjunktív ítéleteket szokott alkotni, amelyekben a diszjunkciós tagok között tartalmilag is kapcsolat van. Még kevésbé valószínű, hogy ha valaki a „kétszer kettő egyenlő öttel, vagy New York nagy város" ítéletet állítaná, ezt értelmes ítéletnek tartanák. Azonban egyáltalán nem lehet bizonyítani elvi lehetetlenségét annak, hogy valaha egy ilyen ítélet megalkotására szükség legyen. Nem lehet szabályt felállítani arra vonatkozóan, mely tények kapcsolatára lehet valaha is szükség, mely tényekre nem. Ezért a logikának, amely minden eshetőséggel számolni akar, úgy kell a logikai formák elméletét kidolgoznia, hogy ne maradjon meg a jelenlegi emberi gondolkodásban használatra kerülő összefüggések szűk keretei között, hanem általánosítsa ezeket, kiterjessze minden lehetséges esetre is. Ez a kiterjesztés egyben azt is jelenti, hogy a logika egyetlen fejezete sem adja meg közvetlenül az emberi gondolkodás formáit és törvényeit. Absztrakt modelljét adja a tényleges emberi gondolkodás valamely oldalának.

Az ítéletek durvaszerkezetének logikája és a logika egészének az emberi gondolkodás gyakorlati folyamatához való viszonya nem különbözik más tudományos rendszereknek

a maguk empirikus tárgyához való viszonyától. Ugyanis a többi tudományok is absztrakt kifejezői a maguk objektumainak. Engels a politikai gazdaságtan kategóriáival kapcsolatban állapítja ezt meg, de más tudományos területekről is példákat hoz fel annak bizonyítására, hogy a közvetlen egybeesés hiánya (tudományos kifejezés és valóságbeli megnyilvánulás között) nem jelenti azt, mintha e tudományok fikció jellegűek lennének, nem a valóságot tükröznék. Így ír Engels: „Megfelelt-e valaha a feudalizmus saját fogalmának? Miután a nyugati frank birodalomban megalapították, miután Normandiában a norvég hódítók továbbfejlesztették s Angliában és Dél-Olaszországban a francia-normannok még jobban kialakították — legjobban megközelítette fogalmát a jeruzsálemi pünkösdi királyságban, amely az Assises de Jerusalem-ben a feudális rend klasszikus kifejezését hagyta hátra. Fikció volt-e ez a rend azért, mert teljes, klasszikus formájában csak rövid időre, Palesztinában valósult meg és ott is nagyrészt csak — papíron? Vagy a természettudományban uralkodó fogalmak fikciók, mert korántsem mindig vágnak egybe a valósággal? Attól a pillanattól kezdve, hogy a fejlődéstant elfogadjuk, a szerves életre vonatkozó valamennyi fogalmunk csak megközelítően felel meg a valóságnak."[13]

A különböző tudományok területéről felhozott példák tanulságainak elméleti megalapozását a következő sorokban találjuk meg. „...e kettő, egy dolog fogalma és valósága, úgy futnak egymás mellett, mint két aszimptotikus vonal, egymáshoz folyton közeledve és soha nem találkozva. A kettőnek ez a különbsége éppen az a különbség, amelynek következtében a fogalom nem egyszerűen, nem közvetlenül maga a valóság és a valóság nem közvetlenül a saját fogalma. Az, hogy valamely fogalomnak megvan a fogalom lényeges tulajdonsága, hogy tehát nem közvetlenül, nem első pillantásra fedi a valóságot, amelyből előbb el kellett vonatkoztatni — még nem ok arra, hogy puszta fikció legyen, hacsak nem nyilvánítja Ön a gondolkodás minden eredményét fikciónak azon az alapon, hogy a valóság azoknak csak nagy kerülővel és akkor is csupán aszimptotikus megközelítéssel felel meg."[14]

Az, amit Engels a fogalom, a gondolkodás (és így speciálisan a tudományos gondolkodás) és a lét közvetett megfelelőségéről ír,

természetesen vonatkozik a gondolkodás és a gondolkodásról végbemenő gondolkodás viszonylatára is. Ebben az esetben is az objektumot (jelen esetben az ítéletet) gondolatokban megragadni csak az objektummal („az ítéletekkel") viszonylagosan egybeesően vagyunk képesek.

A különböző logikai rendszerek a tényleges gondolkodás bizonyos oldalának viszonylag hű megközelítései, melyek tendenciájukban, egységükben képesek a logikai sajátosságok mind mélyebb feltárására.

1.7. AZ ÖSSZETETT ÍTÉLETEK NORMÁLFORMÁRA VEZETÉSE

Az ítéletfajták vizsgálatánál láttuk, hogy ha adott egy formula igazságérték táblázata, akkor diszjunkció, konjunkció és negáció alkalmazásával képezhetünk olyan ítéletformulát, amelynek igazsága azonos a táblázatban megadott igazságfeltételekkel. Az így kapott formulát diszjunktív normálformának neveztük. Valamely formula diszjunktív normálalakját nemcsak értéktáblázat alapján állíthatjuk elő. Az ismertetett azonosságok felhasználásával bármely összetett ítéletformula diszjunktív normálformára hozható. Mielőtt ennek menetét bemutatnánk, határozzuk meg, mit értünk diszjunktív normálformán.

*Diszjunktív normálformá*nak nevezzük az olyan ítéletformulát, amely legfeljebb konjunkciók diszjunkciója, ahol a konjunkciós tagok változók, több tag nincs együttesen tagadva, egy-egy diszjunkciós tagban egy-egy változó legfeljebb egyszer szerepel (megengedve ugyanannak a változónak egyszer tagadva, egyszer tagadás nélküli előfordulását), továbbá a diszjunkciós tagok között nincs két olyan, amely legfeljebb csak a konjunkciós tagok sorrendjében tér el. Például diszjunktív normálformák:

$$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge r)$$
$$(p \wedge \bar{p} \wedge r) \vee q$$
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

Nem diszjunktív normálformák például:

$$[(p \vee q) \wedge r] \vee (\bar{p} \wedge q),$$

mert nem konjunkciók diszjunkciója;

$$\overline{(p \wedge \bar{p} \wedge q)} \vee r,$$

mert több tag együttesen van tagadva;

$$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (q \wedge p),$$

mert van olyan két diszjunkciós tag (az első és az utolsó), amely csak a tagok sorrendjében tér el.

Hogyan lehet valamely összetett ítéletformulát normálformára hozni?

Az ítéletkalkulus bármely formulája diszjunktív normálformára hozható a következő azonosságok felhasználásával:

1. Aritmetikai jellegű azonosságok
2. $\bar{\bar{p}} = p$ negációs azonosság
3. De-Morgan azonosságok
4. Kifejezési azonosságok.

A normálformára hozásnál ezeket az azonosságokat mint műveleti szabályokat használjuk fel. Tehát pl. a $\bar{\bar{p}} = p$ negációs azonosságból következik az a szabály, hogy ha egy formulában $\bar{\bar{p}}$ ítélet szerepel, azt átalakíthatjuk p ítéletté anélkül, hogy az ítélet igazságértéke megváltozna.

A normálformára hozás folyamata a következő lépésekből tevődik össze (természetesen nem mindig van szükség az itt felsorolt lépések mindegyikére). Először a kifejezési azonosságok alkalmazásával átalakítjuk a formulában szereplő nem konjunkcióval, illetve nem diszjunkcióval képezett ítéleteket úgy, hogy a formulában csak konjunkció, diszjunkció és tagadás művelete szerepeljen.

Ezután a De-Morgan azonosságok felhasználásával megszüntetjük több változó együttes tagadását, majd a $\bar{\bar{p}}=p$ negációs azonosság felhasználásával a többszörös tagadásokat tüntetjük el. Végül a számtani azonosságok felhasználásával „rendezzük" a formulát mindaddig, amíg diszjunktív normálformát kapunk.

Nézzünk egy példát a normálformára hozás folyamatára:

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$

a $p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$ kifejezési azonosság alkalmazásával

$\overline{(p \leftrightarrow q)} \vee r$

a $p \leftrightarrow q = (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p)$ kifejezési azonosság alkalmazásával

$\overline{[(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p)]} \vee r$

a $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ De-Morgan azonosság alkalmazásával

$[\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \overline{(\bar{q} \vee p)}] \vee r$

a $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$ De-Morgan azonosság alkalmazásával

$[(\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{\bar{q}} \wedge \bar{p}) \vee r$

a $\bar{\bar{p}}=p$ negációs azonosság, valamint az asszociativitás alkalmazásával

$(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee r$

diszjunktív normálformát kapjuk.

Annak igazolására, hogy az eljárás valóban célravezető, hogy $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ azonos igazságértékű a $(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee r$ disz-

junktív normálformával, készítsük el a két formula igazságérték-táblázatát:

p	q	r	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$
i	i	i	i
i	i	h	h
i	h	i	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i
h	h	h	h

$p \wedge \bar{q}$	$q \wedge \bar{p}$	$[(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)] \vee r$
h	h	h i
h	h	h h
i	h	i i
i	h	i i
h	i	i i
h	i	i i
h	h	h i
h	h	h h

Látható, hogy a két formula igazságérték-táblázata megegyezik, tehát a két formula valóban azonos igazságértékű.

Bármely összetett ítéletformulából nemcsak diszjunktív, hanem konjunktív normálforma is képezhető.

Konjunktív normálformának nevezzük azt a formulát, amely legfeljebb diszjunkciók konjunkciója, ahol a diszjunkciós tagok változók, több tag nincs együttesen tagadva, egy-egy konjunkciós tagban egy-egy változó legfeljebb egyszer szerepel (megengedve, hogy ugyanaz a változó egyszer tagadva, egyszer tagadás nélkül szerepeljen), továbbá a konjunkciós tagok között nincs két olyan, amely legfeljebb csak a tagok sorrendjében tér el.

Például konjunktív normálformák:

$$(p \vee \bar{q}) \wedge (r \vee \bar{r})$$
$$(p \vee q) \wedge r$$
$$(p \vee \bar{p} \vee q) \wedge (q \vee \bar{q} \vee p)$$

A konjunktív normálforma előállításához ugyanazokat az azonosság csoportokat használjuk fel, mint a diszjunktív normálformák képzésénél:

$\overline{\overline{[(p \vee q) \to \bar{q}]} \vee (r \wedge q)}$ a $p \to q = \bar{p} \vee q$ alkalmazásával

$\overline{\overline{[(p \vee q) \vee \bar{q}]} \vee (r \wedge q)}$

a $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$ De-Morgan szabály alkalmazásával

$\overline{\overline{[(p \vee q) \vee \bar{q}]} \wedge \overline{(r \wedge q)}}$

a fenti De-Morgan szabály ismételt és a $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ De-Morgan szabály alkalmazásával

$\overline{\overline{[(p \vee q) \wedge \bar{\bar{q}}]} \wedge (\bar{r} \vee \bar{q})}$

$\bar{\bar{p}} = p$ azonosság alkalmazásával

$[\overline{(p \vee q)} \wedge q] \wedge (\bar{r} \vee \bar{q})$

a $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$ alkalmazásával

$[(\bar{p} \wedge \bar{q}) \wedge q] \wedge (\bar{r} \vee \bar{q})$

az asszociativitási azonosság alkalmazásával

$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge q \wedge (\bar{r} \vee \bar{q})$

konjunktív normálformát kapjuk.

A művelet elvégzésének ismertetett sorrendje nem kötelező. Van olyan eset, hogy a sorrend felcserélésével hamarabb célhoz jutunk. Így példánk esetében lerövidíthetjük az eljárást, ha a

$\overline{\overline{[(p \vee q) \vee \bar{q}]} \vee (r \wedge q)}$

formulánál következő lépésként nem a De-Morgan szabályokat alkalmazzuk, hanem a $\bar{\bar{p}} = p$ azonosságot,

$\overline{[(p \vee q) \vee \bar{q}]} \vee (r \wedge q)$

majd ezután az asszociativitási azonosságot

$\overline{p \vee q \vee \bar{q} \vee (r \wedge q)}$

és ezután használjuk fel a $p \vee q = \bar{p} \wedge \bar{q}$ De-Morgan azonosságot,

$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge q \wedge (\overline{r} \wedge \overline{q})$

majd ismét De-Morgan azonosságot alkalmazva jutunk el a

$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge q \wedge (\bar{r} \vee \bar{q})$

konjunktív normálformához.

Bármely konjunktív normálforma a $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ disztributivitási azonosság alapján átalakítható diszjunktív normálformává.

Például

a) $(p \vee q) \wedge \bar{p}$ konjunktív normálforma ekvivalens a $(p \wedge \bar{p}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ diszjunktív normálformával

b) $(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee z)$ konjunktív normálforma ekvivalens a $(\bar{p} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge z) \vee (\bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{q} \vee z)$ diszjunktív normálformával.

Diszjunktív normálformából viszont a $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ disztributivitási azonosság alkalmazásával kapható konjunktív normálforma.

Például

a) $(p \wedge q) \vee \bar{p}$ diszjunktív normálforma ekvivalens a $(p \vee \bar{p}) \wedge (q \vee \bar{p})$ konjunktív normálformával

b) $(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p}) \vee r$ diszjunktív normálforma ekvivalens a $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar{p} \vee r) \wedge (q \vee \bar{q} \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$ konjunktív normálformával.

KITÜNTETETT ÉS RÖVIDÍTETT NORMÁLFORMÁK

Valamely összetett ítéletformulának nem csak egy konjunktív és nem csak egy diszjunktív normálalakja van. Erre mutat már az előbb említett példánk is $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ normálformára vezetésével a $(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p}) \vee r$ diszjunktív normálformát kaptuk. Elkészítettük a két formula értéktáblázatát és megállapítottuk, hogy igazságérték táblázatuk valóban megegyezik. De ha az értéktáblázatból kiindulva állítjuk elő a $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ formula diszjunktív normálformáját, akkor nem a $(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee r$ alakot kapjuk:

p	q	r	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$	
i	i	i	i	$p \wedge q \wedge r$
i	i	h	h	
i	h	i	i	$p \wedge \bar{q} \wedge r$
i	h	h	i	$p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}$
h	i	i	i	$\bar{p} \wedge q \wedge r$
h	i	h	i	$\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}$
h	h	i	i	$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r$
h	h	h	h	

A diszjunktív normálforma a következő lesz:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$$

Ez a diszjunktív normálforma — eltérően a vele azonos igazságértékű $(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee r$ diszjunktív normálformától — ún. kitüntetett diszjunktív normálforma.

Kitüntetett diszjunktív normálformának nevezzük az olyan diszjunktív normálformát, ahol minden egyes diszjunkciós tagban a normálformában előforduló minden egyes változó (negálva vagy negálatlanul) szerepel.

Így tehát:

$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)$ kitüntetett diszjunktív normálforma.

$(q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r)$ nem-kitüntetett diszjunktív normálforma, mivel a diszjunkció első tagjában p nem szerepel sem negálva, sem negálatlanul.

Bármely nem-kitüntetett diszjunktív normálforma átalakítható kitüntetett diszjunktív normálformává. Ugyanis ha valamely konjunkciós tagban nem szerepel a normálforma valamely változója, ezt mindig be lehet vinni a következő azonosságok felhasználásával:

$$p \wedge i = p$$
$$p \vee \bar{p} = i$$

A következőképpen okoskodunk:

Ha egy konjunkcióban nem szerepel valamely változó, ezt hozzáírhatjuk, de csak úgy, hogy a konjunkció igazságértéke ne változzon meg. Ha pl. a $(q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r)$ diszjunktív normálforma esetében azt akarjuk, hogy az első diszjunkciós tagban is szerepeljen p változó, akkor ehhez az első diszjunkciós taghoz (konjunkcióhoz) konjugálhatjuk a $p \vee \bar{p}$ kifejezést, mert ez nem változtatja meg e konjunkció igazságértékét. Ugyanis, ha egy konjunkció igaz, igaz marad, ha hozzáadunk még egy igaz tagot, ha viszont egy konjunkció hamis, igaz tag hozzáadása nem teszi igazzá. (A konjunkció csak akkor igaz, ha minden tagja igaz!)

Tehát:

$(q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ formula első diszjunkciós tagjához konjugáljuk a $(p \vee \bar{p})$ formulát:

$[(q \wedge r \wedge (p \vee \bar{p})] \vee (p \wedge q \wedge r)$ majd a disztributivitást alkalmazzuk:

$(p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$, ebből a $p \vee p = p$ azonosság alkalmazásával

$(p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r)$ kitüntetett diszjunktív normálformát kapunk.

Kitüntetett konjunktív normálformának nevezzük az olyan konjunktív normálformát, amelynek minden egyes konjunkciós tagjában a normálformában előforduló minden egyes változó (negálva vagy negálatlanul) szerepel. Így

$(p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$ kitüntetett konjunktív normálforma.
$(p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee r)$ nem-kitüntetett konjunktív normálforma, mivel az első konjunkciós tagban r, a másodikban p nem szerepel.

Bármely nem-kitüntetett konjunktív normálforma átalakítható kitüntetett konjunktív normálformává. Ugyanis, ha egy diszjunkciós tagban nem szerepel valamely változó, azt hozzáírhatjuk a következő azonosságok felhasználásával:

$$p \vee t = p$$
$$p \wedge \bar{p} = t$$

Alakítsuk át a $(p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee r)$ konjunktív normálformát a fenti azonosságok felhasználásával kitüntetett konjunktív normálformává:

$$[(p \vee q) \vee (r \wedge \bar{r})] \wedge [(\bar{q} \vee r) \vee (p \wedge \bar{p})]$$
$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \bar{r}) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \vee (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$$

Nemcsak arra van lehetőség, hogy a nem-kitüntetett normálformát kitüntetett normálformává alakítsuk át, de azonosságok alkalmazásával lehetőség van a kitüntetett normálformák és általában a normálformák egyszerűsítésére mindaddig, amíg el nem érkezünk a formula legrövidebb alakjához. *Valamely formula legrövidebb alakja az a vele megegyező igazságértékű formula, amelyik a legkevesebb számú változót, a legkevesebb előfordulási esetben tartalmazza.*

Lássunk példákat konjunktív normálformák egyszerűsítésére, rövidítésére. Hogyan rövidíthetők az alábbi formulák?

pl. 1. $(p \vee \bar{p} \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge z$, mivel az első konjunkciós tagban $p \vee \bar{p}$ szerepel. A formula
$p \vee \bar{p} = i, i \vee p = i, \; p \wedge i = p$
azonosságok felhasználásával rövidíthető: $(q \vee r) \wedge z$ alakra.

pl. 2. $(p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge z$, mivel a második konjunkciós tagban előfordul az első konjunkciós tag valamennyi változója, a formula

$p \wedge (p \vee q) = p$

azonosság értelmében

$(p \vee q) \wedge z$

alakra rövidíthető.

pl. 3. $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \wedge z$, mivel az első és második konjunkciós tag csak abban tér el egymástól, hogy az elsőben q, a másodikban $\bar{q}$ szerepel, a formula a

$(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) = p$

azonosság alkalmazásával

$(p \vee r) \wedge z$

alakra hozható.

pl. 4. $p \wedge (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge z$, mivel a második konjunkciós tagban az első konjunkciós tag egyetlen változójának negáltja szerepel, a formula a

$[p \wedge (\bar{p} \vee q)] = p \wedge q$

azonosság alkalmazásával

$p \wedge (q \vee r) \wedge z$

alakra hozható.

pl. 5. $(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee r) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})$ az első konjunkciós tagban $\bar{p}$, a másodikban p szerepel, p és $\bar{p}$ közül az egyik feltétlenül hamis, ezért q vagy r közül az egyiknek igaznak kell lennie. (Különben nem igaz a konjunkció!) Ezért a formula igazságán nem változtat, ha hozzákonjugáljuk a $\bar{q} \vee r$ formulát:

$(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee r) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{q} \vee r)$

Továbbá a fenti okoskodáshoz hasonlóan a konjunkció második és harmadik tagjából kiindulva a formulához konjugálhatjuk a $p \vee \bar{q}$ formulát:

$(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee r) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{q} \vee r) \wedge (p \vee \bar{q})$

E formulából a 3. példában említett azonosság alkalmazásával

$(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge \bar{q}$

végül a 2. példában említett azonosság alkalmazásával

$(p \vee r) \wedge \bar{q}$

formulához jutunk, amely az eredeti formula legrövidebb alakja.

Eddig olyan példákat említettünk, ahol konjunktív normálformákból rövidebb konjunktív normálformákat kaptunk. Diszjunktív normálformák rövidítésére természetesen szintén van lehetőség. Foglaljuk össze e rövidítéseknél leggyakrabban felhasználásra kerülő azonosságokat.

Konjunktív normálformák rövidítésénél:	Diszjunktív normálformák rövidítésénél:
$p \vee \bar{p} = i$	$p \wedge \bar{p} = h$
$p \wedge i = p$	$p \vee h = p$
$p \wedge (p \vee q) = p$	$p \vee (p \wedge q) = p$
$(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) = p$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) = p$
$p \wedge (\bar{p} \vee q) = p \wedge q$	$p \vee (\bar{p} \wedge q) = p \vee q$
$(\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee r) =$	$(\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge r) =$
$= (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \wedge r)$	$= (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

A fenti azonosságok alkalmazásával nem feltétlenül jutunk el a formula legrövidebb alakjához. Van olyan eset, hogy egy formula legrövidebb alakját úgy kapjuk meg, ha konjunktív normálformáról áttérünk diszjunktív normálformára (vagy fordítva, ha diszjunktívról konjunktív normálformára térünk át).

Így pl.

$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

konjunktív normálformából a disztributivitási azonosság alkalmazásával

$p \vee (q \wedge r)$

diszjunktív normálformát kapjuk, a konjunktív normálformánál rövidebb alakot.

Számos logikai probléma megoldásánál fontos az adott formula legrövidebb alakjának megtalálása. Erre vonatkozóan a modern logikában különböző módszerek vannak. Ezek ismertetésére az adott keretek között nem térhetünk ki.[15]

GYAKORLATOK:

29. Állapítsuk meg az alábbi formulákról, normálformák-e, s ha nem, a tanult azonosságok alkalmazásával hozzuk konjunktív normálformára:

$(p \vee q) \wedge (p \vee z)$
$(p \wedge \bar{p}) \wedge (p \vee z)$
$(p \vee q) \wedge (p \vee z)$
$(p \vee z) \wedge (q \vee z) \wedge (z \vee p)$
$p \vee q$

30. Állapítsuk meg, milyen azonosságokat alkalmaztunk a következő normálformára hozásnál:

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$
$(p \leftrightarrow q) \vee (p \vee q)$
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \vee p \vee q$
$(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p}) \vee p \vee q$

31. Hozzuk diszjunktív, majd konjunktív normálformára az alábbi formulákat:

$(p \wedge q) \rightarrow (z \vee q)$
$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

32. Alakítsuk át kitüntetett normálformává az alábbi normálformákat:

$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \bar{p} \vee q$
$p \vee \bar{q} \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$
$(p \vee q \vee r) \wedge \bar{r} \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$

33. Rövidítsük le a következő normálformákat a tanult azonosságok felhasználásával:

$(\bar{p} \vee q) \wedge p \wedge (p \vee r \vee \bar{r})$
$(p \wedge q) \vee (q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge r)$

1.8. MINDIG-IGAZ, MINDIG-HAMIS, KIELÉGÍTHETŐ FORMULÁK

Tudjuk, hogy az összetett ítéletek igazsága kizárólag az őket alkotó elemi ítéletek igazságértékének függvénye. Az ítéletformulák igazságértéke attól függ, hogy a formulákban szereplő változókat milyen igazságértékű ítélettel helyettesítjük. Például ha $p \to q$ ítéletformulában p helyébe igaz ítéletet és q helyébe is igaz ítéletet helyettesítünk, akkor $p \to q$ az igaz értéket veszi fel. Ezzel szemben ha p-t igaz ítélettel, q-t hamis ítélettel helyettesítjük, akkor $p \to q$ a hamis értéket veszi fel. Az olyan ítéletformulát, amely (hasonlóan a $p \to q$ formulához) a benne szereplő változók bizonyos igazságértéke mellett igaz értéket vesz fel, *kielégíthető formulának nevezzük*.

Különleges szerepe van a logikában azoknak az összetett-ítéletformuláknak, amelyek mindig igaz értéket vesznek fel, függetlenül attól, hogy a bennük szereplő változók helyébe igaz vagy hamis ítéletet helyezünk. Az ilyen formulák *mindig-igaz* ítéletek (vagy más elnevezéssel *azonosan igaz* ítéletek) formulái. Mindig-igaz ítéletekkel találkoztunk már az eddigi részekben is. Pl. a $p \vee \bar{p}$ formájú ítélet mindig-igaz ítélet, ugyancsak mindig-igaz ítéletek formulái a következők: $p \to p$, $\overline{p \wedge \bar{p}}$ stb. A mindig-igaz ítéletek igazságának megállapításához nincs szükség az ítélet tartalmának a valósággal való összevetésére. Ha a „Jelenleg Budapesten 28° meleg van" ítélet igazságáról akarunk meggyőződni, akkor állításunk igazságának bizonyítására a valósághoz kell fordulnunk (pl. hőmérővel kell ellenőrizni a hőmérsékletet jelenleg Budapesten), de ha a „Jelenleg Budapesten 28° meleg van, vagy jelenleg Budapesten nincs 28° meleg" ítéletet állítjuk, ennek igazsága bizonyítható anélkül, hogy az ítélet konkrét tartalmát összevetnénk a valósággal. Az ítélet logikai formájából ($p \vee \bar{p}$) következik igazsága.

E formula igaz függetlenül attól, hogy p ítélet igaz-e vagy sem. (Igaz az ítélet akkor is, ha p igaz, mivel $i \vee h = i$, igaz akkor is, ha p hamis, mivel $h \vee i = i$.)

A mindig-igaz ítéletet „logikailag igaz" ítéletnek is nevezik. Ezzel kapcsolatban fel kell hívni a figyelmet arra, hogy a mindig-igaz ítélet csak adott logikai rendszerben, jelen esetben a kétértékű logika keretei között mindig-igaz. A kétértékű logika mindig-igaz formulái nem feltétlenül logikai igazságok (nem mindig-igazak) a többértékű logikákban.[16]

A mindig-hamis ítéletek formulái olyan ítéletformulák, amelyek függetlenül attól, hogy a bennük szereplő elemi ítéletformulák helyébe igaz vagy hamis értékű ítéleteket helyezünk, mindig hamis értéket vesznek fel. Mindig-hamis (azonosan hamis) ítéletek formulái pl.:

$$p \leftrightarrow \bar{p}, \qquad p \wedge \bar{p}$$

A mindig-hamis ítéletek tagadásai mindig-igaz ítéletek. Például

$$\overline{p \leftrightarrow \bar{p}}, \qquad \overline{p \wedge \bar{p}}$$

Arról, hogy valamely ítéletformula kielégíthető, mindig-igaz vagy mindig-hamis, meggyőződhetünk, ha elkészítjük a formula értéktáblázatát. Például

p	$\bar{p}$
i	h
h	i

$p \leftrightarrow p$
i
i

mindig-igaz

$p \rightarrow \bar{p}$
h
i

kielégíthető

$p \leftrightarrow \bar{p}$
h
h

mindig-hamis

Táblázat alapján azonban nehéz megadni olyan formulák igazságértékét, amelyek sok változót tartalmaznak, sok előfordulási esetben. Ilyenkor célszerű e formulákat normálformára vezetni és a normálforma segítségével vizsgálódni.

Valamely formula konjunktív normálalakjáról leolvasható, hogy a formula mindig-igaz formula-e vagy sem.

A konjunktív normálforma mindig-igaz, ha minden konjunkciós tagjában szerepel legalább egy változó tagadva és tagadás nélkül is. Itt a kiszámítási azonosságokra támaszkodunk:

$$1.\ p \vee \bar{p} = i$$
$$2.\ p \vee i = i$$
$$3.\ i \wedge i = i$$

Ezeknek az azonosságoknak műveleti szabályként való felhasználásával bármely konjunktív normálformáról leolvasható, hogy mindig-igaz-e. Így pl. azt akarjuk megállapítani, hogy mindig-igaz-e a $(p \vee \bar{p}) \wedge (q \vee p \vee \bar{q})$ konjunktív normálforma?

A konjunkció első tagjának helyébe $(p \vee \bar{p})$ igazat írhatunk az 1. azonosság $(p \vee \bar{p} = i)$ értelmében. A konjunkció második tagjában szerepel: $q \vee \bar{q}$. Ennek a helyébe szintén az 1. azonosság alapján igazat írhatunk. Így a konjunkció második tagja: $p \vee i$ lesz. A 2. azonosság értelmében ez is azonos igazzal. Végül a 3. azonosság alkalmazásával (ha a konjunkció minden tagja igaz, a konjunkció is igaz) megállapíthatjuk, hogy $(p \vee \bar{p}) \wedge (q \vee p \vee \bar{q})$ azonos igazzal. Írjuk fel tehát a lépéseket:

$$(p \vee \bar{p}) \wedge (q \vee p \vee \bar{q})$$
a $p \vee \bar{p} = i$ azonosság alkalmazásával:
$$(i) \wedge (p \vee i)$$
a $p \vee i = i$ azonosság alkalmazásával:
$$(i) \wedge (i)$$
az $i \wedge i = i$ alkalmazásával:
$$i$$

Vagyis azt az eredményt kaptuk, hogy $(p \vee \bar{p}) \wedge (q \vee p \vee \bar{q})$ mindig-igaz, tekintet nélkül arra, hogy a formulában szereplő p és q értéke igaz-e vagy hamis.

Kitüntetett diszjunktív normálformáról szintén leolvasható, ha a formula mindig-igaz.

Tudjuk, hogy a diszjunkció akkor igaz, ha legalább egy tagja igaz. De hogyan állapítható meg, hogy valamelyik diszjunkciós tag igaz? Itt megint egy azonosságra, a $p \vee \bar{p} = i$ azonosságra támasz-

kodunk. Ennek alapján $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = i$. Ez könnyen belátható, ha meggondoljuk, hogy itt p és q valamennyi lehetséges kombinációja szerepel, tehát ezek közül az egyiknek feltétlenül igaznak kell lenni.

p és q lehetséges kapcsolatai:

p	q
i	i
i	h
h	i
h	h

Ezért $p \wedge q$ (első sor) $p \wedge \bar{q}$ (második sor), vagy $\bar{p} \wedge q$ (harmadik sor) vagy $\bar{p} \wedge \bar{q}$ (negyedik sor) valamelyikének fenn kell állnia. Tudjuk, hogy a diszjunkció igazságához elegendő, ha az egyik tagja igaz, ezért $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$ egyenlő igazzal. Ennek alapján megfogalmazhatjuk: *Valamely n számú változóból álló kitüntetett diszjunktív normálforma akkor mindig-igaz, ha* 2^n *olyan diszjunkciós tagja van, amelyben egyetlen változó sem szerepel negálva és negálatlanul is.*

Mindig-hamis a diszjunktív normálforma, ha minden egyes konjunkciós tagjában szerepel legalább egy változó tagadva és tagadás nélkül is.

Itt a következő kiszámítási azonosságokra támaszkodunk:

$$p \wedge \bar{p} = h$$
$$p \wedge h = h$$
$$h \vee h = h$$

Ennek értelmében mindig-hamis diszjunktív normálforma pl. a következő:

$$(p \wedge \bar{p} \wedge q) \vee (q \wedge \bar{q})$$

A kitüntetett konjunktív normálformáról is leolvasható, ha a formula mindig-hamis. Valamely n számú változóból álló kitüntetett konjunktív normálforma mindig-hamis, ha 2^n olyan konjunkciós tagja van, amelyben egyetlen változó sem szerepel negálva és negálatlanul is.

Mindig-hamis kitüntetett konjunktív normálforma pl.

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$$

Miért mindig-hamis a fenti formula?

A konjunkció hamis, ha valamelyik tagja hamis. Itt a konjunkciós tagok diszjunkciók, tehát e kitüntetett konjunktív normálforma hamis, ha valamelyik diszjunkciós tagja hamis. Mivel a fenti formulában két változó valamennyi lehetséges diszjunkciós kapcsolata szerepel, feltétlenül van olyan diszjunkciós tag, amelyben mindkét változó hamis, és így ezek diszjunkciója is hamis, ami hamissá teszi a kitüntetett konjunktív normálforma egészét is.

GYAKORLAT:

34. Állapítsuk meg az alábbi formuláról: mindig-igaz, mindig-hamis, vagy kielégíthető formulák?

$$p|p$$
$$(p \nabla p) \wedge q$$
$$(p \leftrightarrow p) \vee q$$
$$(p \rightarrow \bar{p}) \wedge \bar{p}$$
$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee$$
$$\vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$$

2. AZ ÍTÉLETEK DURVASZERKEZETÉN ALAPULÓ KÖVETKEZTETÉSEK

2.1. A KÖVETKEZTETÉSEK ÁLTALÁNOS JELLEMZÉSE

Az összetett ítéletek logikai szerkezetének ismerete lehetőséget ad az ezen ítéletek sajátosságain alapuló következtetések vizsgálatára. Mielőtt ezek tárgyalására rátérnénk, néhány szót kell szólnunk a következtetés műveletéről általában.

A következtetés olyan logikai művelet, amely lehetővé teszi, hogy a rendelkezésünkre álló ismeretekből kiindulva logikai úton új ismeretekre tegyünk szert új ítéletek megalkotása révén.

Azoknak a jelenségeknek, összefüggéseknek a megismeréséhez, amelyeket nem tudunk közvetlenül érzékelni, feltétlenül *következtetni* kell. A tudomány következtetések segítségével állapítja meg pl. az égitestek méreteit és tömegét, a közöttük levő távolságokat, vegyi összetételüket, a rajtuk lezajló folyamatokat. Következtetések révén fedezték fel az atomon belüli és atommagon belüli bonyolult folyamatokat is stb. A következtetések nélkülözhetetlen eszközei a valóság mélyebb megismerésének.

Fogalom és ítélet nemcsak kiindulópontjai a következtetéseknek, a következtetések egyben új ítéletek, új fogalmak megalkotását is lehetővé teszik. Ismeretes pl., hogy a levegő, mint bármely gáz, normális állapotban nem tartalmaz elektromos töltésű részecskéket.

Ha pedig a levegőben nincsenek elektromos töltésű részecskék, azaz ha nem ionizált, akkor nem vezetheti az elektromos áramot. A tudósok azonban megállapították, hogy a levegő a légkör bármely részén vezeti az elektromos áramot. Ezen az alapon — ezekből a tételekből kiindulva — következtetések segítségével kiderítették, hogy a világűrből a Föld légterébe különleges sugarak hatolnak be, amelyek ionizálják a levegőt. Ilyen következtetések útján fedezték fel a kozmikus sugárzást, és ennek eredményeként alkotta meg a tudomány a „kozmikus sugárzás" fogalmát.

Következtetések teszik lehetővé a tudományos előrelátást is. A már fennálló tények ismerete alapján a jövőben bekövetkező

tények, események várható alakulására is tudunk *következtetni*. Példa erre a szocializmus elméletének kidolgozása. A kapitalista társadalom törvényeinek, ellentmondásainak tanulmányozása alapján a marxizmus klasszikusai a következtetések egész láncolatát alkalmazva képesek voltak a szocialista társadalom körvonalait egy olyan korszakban megrajzolni, amikor ilyen társadalom a valóságban még nem létezett. Tudományos következtetéseik igazságát a mi korszakunk gyakorlata igazolja.

A következtetések nemcsak arra alkalmasak, hogy segítségükkel új ismeretekhez jussunk el, hanem eszközül szolgálnak ahhoz is, hogy valamely adott ítélet igazságát vagy hamisságát feltárjuk. A bizonyítás, illetve a cáfolat művelete szintén következtetések formájában megy végbe.

A különböző tudományok a következtetési módok gazdag skáláját alkalmazzák, azonban a következtetési eljárások helyességét nem feladatuk megvizsgálni. Ezt a feladatot a logikára bízzák. A következtetéselmélet feladata, hogy igazolja a tudományok által használt következtetések érvényességét. Más esetekben pedig, hogy megmutassa, mely következtetési eljárások nem vezetnek minden esetben igaz zárótételhez, továbbá milyen következtetési hibák lehetségesek.

A helyes következtetési módok ismeretére nemcsak a tudományokban van szükség. A mindennapi életben szintén számtalan következtetést alkalmazunk. A hétköznapi életben a gondolkodó embernek szintén szüksége van arra, hogy az általa használt következtetések szabályait ismerje. Fel kell vérteznie magát a logika ismeretével, hogy tudatosan helyesen gondolkodjék, és hogy könnyen és biztosan felismerje más emberek gondolkodásában az esetleg felmerülő következtetési hibákat.

Minden következtetési eljáráshoz szükség van egy vagy több kiinduló ítéletre, tételre. Ezek a következtetés *előzményei (premisszák)*. A következtetési eljárás során az előzményekből bizonyos megalapozó tudás és az erre épülő következtetési szabályok felhasználásával jutunk el a következményhez, a *zárótételhez (konklúzió)*.

A következtetések osztályozhatók abból a szempontból, hogy milyen típusú megalapozó tudás szükséges a zárótétel levonásához.

E szempont alapján emelhetjük ki a következtetések szillogisztikus csoportját.

Szillogisztikus következtetésnek[17] vagy egyszerűen szillogizmusnak nevezzük az olyan következtetést, ahol a zárótétel levonásához a megalapozó tudásként csupán logikai formák és törvények ismeretét használjuk fel és nem támaszkodunk sem a premisszák tartalmának, sem igazságának ismeretére. *A szillogisztikus következtetések csoportjában érvényes következtetésnek nevezzük az olyan következtetést, melyben az előzmények logikailag elégséges alapot nyújtanak a zárótétel levonásához, és így a zárótétel logikai szükségszerűséggel folyik az előzményekből.*

A szillogisztikus és a nem-szillogisztikus formájú következtetések közötti különbség megvilágítására hasonlítsuk össze az alábbi két következtetést:

I. Ha Pál apja János, akkor Jánosnak fia van
Pál apja János
Tehát
Jánosnak fia van.

II. Pál magasabb mint János
János magasabb mint Béla
Tehát
Pál magasabb mint Béla

A két következtetés közül az első szillogisztikus. Ugyanis az előzményekből a zárótételhez való eljutáshoz elegendő az ítéletek logikai formájának ismerete. A második következtetésnél az ítélet konkrét tartalmában kifejeződő térbeli viszonylat (magasabb mint...) sajátosságainak ismeretére van szükség ahhoz, hogy a zárótételt levonjuk.

A szillogisztikus következtetések további alcsoportokra tagolhatók, aszerint, hogy megalapozó tudásként mely logikai forma ismeretét használjuk fel. Ezen az alapon vannak olyan szillogizmusok, ahol az összetett ítélet sajátosságainak ismeretét, és vannak olyanok, ahol az egyszerű ítéletek belső struktúrájának ismeretét használjuk fel a következtetések folyamatában. A most következőkben az

ítéletek durvaszerkezetén, vagyis az összetett ítéletek sajátosságain alapuló következtetésekkel foglalkozunk, ezek közül ismertetünk néhány nevezetes következtetési eljárást.

2.2. A FELTÉTELES ÉS A SZÉTVÁLASZTÓ SZILLOGIZMUSOK

Az ún. feltételes szillogizmusoknál a megalapozó tudás, amelynek ismeretében az előzményekből a zárótételhez eljutunk, a „ha-akkor" típusú ítéletek általános tartalma.

Feltételes szillogizmus pl. a következő:

Ha a közlekedőedény minden ágában azonos magasságban van a folyadékszint, akkor a közlekedőedénybe öntött egynemű folyadék nyugalomban van.

A közlekedőedény minden ágában azonos magasságban van a folyadékszint.

Tehát:

A közlekedőedénybe öntött egynemű folyadék nyugalomban van.

Ha eltekintünk a következtetésben szereplő elemi ítéletek konkrét tartalmától, a következő formát kapjuk:

$$p \rightarrow q$$
$$p$$
$$\text{Tehát: } q$$

A felső tétel azt mondja ki, hogy p és q között olyan kapcsolat van, amely szerint p elégséges alapul szolgál q-hoz. Az alsó tételben állítjuk p ítéletet, ebből arra következtethetünk, hogy q is fennáll. Ez a következtetés a *feltételes* szillogizmus *állító módozata (modus ponens)*.

Az állító módozatban az alsó tételnek és a zárótételnek természetesen nem kell feltétlenül állító (negációt nem tartalmazó) ítéletnek lennie. Ha a felső tétel előtagja és utótagja tagadó formájú (tartalmaz negációt), akkor az előtagot állító alsó tétel és az utótag fennállását tartalmazó zárótétel is tagadó formájú lesz. Nyilvánvaló, hogy ez esetben is állító módozattal van dolgunk.

Például:

Ha az égen nem látni a napot, a fenyőerdő nem áraszt gyantaszagot.

Az égen nem látni a napot.

Tehát:

A fenyőerdő nem áraszt gyantaszagot.

Képletben kifejezve:

$$\begin{array}{l} \bar{p} \rightarrow \bar{q} \\ \bar{p} \\ \text{Tehát: } \bar{q} \end{array}$$

A feltételes szillogizmus ún. *tagadó módozata (modus tollens)* a következő:

Ha ez a sokszög szabályos, akkor e köré az idom köré kör rajzolható.

E köré az idom köré nem rajzolható kör.

Tehát:

Ez a sokszög nem szabályos.

Eltekintve az ítéletek konkrét tartalmától:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \bar{q} \\ \text{Tehát: } \bar{p} \end{array}$$

A tagadó módozatnál sem feltétlenül szükséges, hogy a zárótétel tagadó ítélet legyen. Ezt a módozatot nem azért nevezzük tagadónak, mert tagadó ítéletek szerepelnek benne, hanem azért, mert az alsó tétel tagadja a felső tételben következményként szereplő tényt.

Tagadó módozat állító zárótétellel:

Ha az elektronoknak nincs elektromos töltésük, akkor mágneses térben nem hajlanak el.

Az elektronok elhajlanak a mágneses térben.

Tehát:

Az elektronoknak elektromos töltésük van.

A feltételes szillogizmusokkal kapcsolatos gyakori hiba, amikor az előtag tagadásából az utótag tagadására, vagy az utótag állításából az előtag állítására következtetnek. Az ilyen következtetések nem érvényesek, hiszen egy és ugyanazon következményt kiválthat más-más alap is.

Például:

Ha Péter egyetemi hallgató, köteles vizsgázni.
Péter nem egyetemi hallgató.
Tehát:
Péter nem köteles vizsgázni.

Ha Péter egyetemi hallgató, köteles vizsgázni.
Péter köteles vizsgázni.
Tehát:
Péter egyetemi hallgató.

A fenti következtetések logikailag nem helyesek. Az implikációs ítélet — mint tudjuk — csak azt állítja, hogy p elégséges alap q-hoz, de nem állítja, hogy csakis p esetén állhat fenn q. Továbbá azt állítja, hogy ha nincs meg a következmény, nincs meg az alap sem, de nem állítja, hogy a következmény megléte esetén feltétlenül ez az alap van jelen.

A feltételes szillogizmust széleskörűen alkalmazzuk a tudományokban, különösen olyan esetekben, amikor valamilyen feltevéssel van dolgunk. (Ha p, akkor q.) Miután meggyőződünk a feltevés igazságáról (p fennáll), az állító módozat szerint következtetünk (q). Ha viszont a következmény hamissága bizonyosodik be ($\bar{q}$), a tagadó módozat szerint a feltevés hamisságára következtetünk ($\bar{p}$).

A feltételes szillogizmusok csoportjába tartozik az ún. *kontrapozíciós következtetés* is. Itt csupán egy ha-akkor ítéletből következtetünk.

Például:

Ha a gáz kiterjed, akkor a gáz lehűl.
Tehát:
Ha nem hűl le a gáz, akkor nem terjed ki.

$$p \rightarrow q$$
$$\text{Tehát: } \bar{q} \rightarrow \bar{p}$$

A tisztán feltételes szillogizmusban már több „ha-akkor" típusú ítélet szerepel.

E következtetésben az alapok és következmények láncszerű módon kapcsolódnak egymáshoz. Valamely alap kivált egy következményt, ez a következmény viszont egy más következménynek alapul szolgál.

Például:

Amikor csökken a gázra gyakorolt nyomás, akkor a gáz kiterjed. Amikor a gáz kiterjed, lehűl.

Tehát:

Amikor csökken a gázra gyakorolt nyomás, a gáz lehűl.

Ezen összefüggés felhasználásával végzett következtetések formája:

$$p \rightarrow q$$
$$q \rightarrow r$$
$$\text{Tehát: } p \rightarrow r$$

A szétválasztó szillogizmusok a „vagy" kötőszóval képezett összetett ítéletekben kifejeződő viszonyokon alapulnak. A „vagy" nyelvi forma, mint tudjuk, különböző összetett ítélettípusok nyelvi formája. A különböző ítélettípusoknak megfelelően különböző szétválasztó szillogizmus módozatok érvényesek.

A szétválasztó szillogizmus *tagadva állító (modus tollendo ponens)* módozata a következő:

Például:

Az értéktöbblet növekedése vagy a munkaidő meghosszabbításából, vagy a szükséges munkaidő csökkenéséből állt elő.
Az értéktöbblet növekedése nem a munkaidő meghosszabbításából állt elő.

Tehát:

Az értéktöbblet növekedése a szükséges munkaidő csökkenéséből állt elő.

Képletben kifejezve:

$$p \vee q$$
$$\bar{p}$$
$$\text{Tehát: } q$$

Természetesen ugyancsak érvényes következtetés:

$$p \vee q$$
$$\bar{q}$$
Tehát: p

A megismerésben nagy jelentősége van a tagadva állító módozatnak. Van olyan megismerési feladat, ahol igen nehéz, sőt lehetetlen közvetlenül megtalálni a megoldást, de számbavehetők az összes lehetséges megoldási módok. (Vagyis felírható a „p vagy q vagy r vagy z" premissza.) Ebben az esetben a megismerés úgy halad előre, hogy igyekszünk az összes lehetőségeket egy kivételével kizárni és így eljutni a kérdés pozitív megoldásához. A következtetésnek ez a formája is modus tollendo ponens lesz. Képletben kifejezve ez pl. ilyen lehet:

$$p \vee q \vee r \vee z$$
$$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}$$
Tehát: z

A pedagógiai munkában is fontos szerepe van a modus tollendo ponensnek. Amikor a diák nem képes egy kérdésre a helyes feleletet egyszeriben megadni, a tanár feladata rávezetni tanítványát a helyes megoldásra. Milyen lehetséges megoldások vannak? Jelen esetben mi nem állhat fenn ezek közül? Tehát mi a helyes megoldás?

A tagadva állító módozat megengedő diszjunkció vagy kizáró diszjunkció premisszával ad érvényes következtetést. Kizárás esetében tagadva-állítás nem alkalmazható, logikailag helytelen.

A „vagy"-nak mint kizárásnak az alapján érvényes következtetés a szétválasztó szillogizmus *állítva tagadó módozata (modus ponendo tollens)*.

Például:

A szívátültetési műtétet túléli a beteg, vagy a szervezete kivetette az idegen anyagot.

A szívátültetési műtétet túléli a beteg.

Tehát:

Szervezete nem vetette ki az idegen anyagot.

Képletben kifejezve:

$$\begin{array}{l} p|q \\ p \\ \text{Tehát: } \bar{q} \end{array}$$

Nem változtat a következtetés érvényességén, ha q ítéletet állítjuk és p ítélet igazságát tagadjuk:

$$\begin{array}{l} p|q \\ q \\ \text{Tehát: } \bar{p} \end{array}$$

szintén ponendo tollens formájú következtetés.

Az állítva tagadó módozatot nem használhatjuk megengedő diszjunkció esetében, mivel ez az ítélet igaz akkor is, ha p ítélet is és q ítélet is igaz, tehát nem lehet az egyik állításából a másik tagadására következtetni.

Az állítva tagadó módozat zárótétele nem feltétlenül tagadó ítélet, a tagadva állító módozat zárótétele nem feltétlenül állító ítélet.

$$\begin{array}{l} \bar{p}|\bar{q} \\ \bar{p} \\ \text{Tehát: } q \end{array}$$

állítva tagadó módozat, mivel itt a felső premisszában megjelölt $\bar{q}$ tagadására következtetek, tehát $\bar{\bar{q}}$-ra, ami azonos q ítélettel.

$$\begin{array}{l} \bar{p} \vee \bar{q} \\ p \\ \text{Tehát: } \bar{q} \end{array}$$

tagadva állító módozat, mivel itt p tagadásából következtetek a felső tételben szereplő $\bar{q}$ állítására.

A feltételes és a szétválasztó szillogizmusokban nemcsak két elemi ítélet és ezek tagadásai szerepelhetnek. Így pl. feltételes szillogizmus az alábbi következtetés is:

Ha ez a következtetés logikailag helyes, és igazak a kiinduló tételek, akkor a következtetés zárótétele igaz ítélet.

Ez a következtetés logikailag helyes, és igazak a kiinduló tételek.

Tehát:

A következtetés zárótétele igaz ítélet.

Képletben:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$
$$p \wedge q$$
$$\text{Tehát: } r$$

*A feltételes-szétválasztó szillogizmusok*nál már különböző típusú összetett ítéletek logikai formájának ismeretét használjuk fel.

Például:

Ha az anyag egynemű atomokból áll, akkor elem, és ha különnemű atomokból áll, akkor összetett anyag.

Az anyag vagy egynemű, vagy különnemű atomokból áll.

Tehát:

Az anyag vagy elem, vagy összetett anyag.

Képletben kifejezve:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow z)$$
$$p \vee r$$
$$\text{Tehát: } q \vee z$$

A fenti következtetés *dilemmás* következtetés, mivel két „ha-akkor" ítélet konjunkciója szerepel benne. Vannak trilemmás és általában polilemmás következtetések is, az előzményben szereplő, a konjunkciós ítélet tagjait képező „ha-akkor" ítéletek számának megfelelően.

Attól függően, hogy a következtetés zárótételében diszjunkciós ítélet vagy egyszerű ítélet szerepel, megkülönböztetünk összetett és egyszerű dilemmát. Ha a diszjunkciós ítélet az alapok valamelyi-

kének fennállását állítja, a dilemma építő, ha a következmények fennállását tagadja, a dilemma bontó. Az alábbi négy következtetésképlet a két felosztásból adódó négy variációt mutatja be:

Egyszerű építő	Egyszerű bontó
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ $p \vee q$ Tehát: r	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ $\bar{q} \vee \bar{r}$ Tehát: $\bar{p}$
Összetett építő	**Összetett bontó**
$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow z)$ $p \vee r$ Tehát: $q \vee z$	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow z)$ $\bar{q} \vee \bar{z}$ Tehát: $\bar{p} \vee \bar{r}$

Az eddigiekben ismertetett következtetések az összetett ítéletek sajátosságain alapuló lehetséges következtetési eljárásoknak csak kis hányadát alkotják. Hasonlóan ahhoz, ahogy a kontrapozíciós következtetés esetében ítéletek közötti azonosságot használtunk fel, bármely más, összetett ítéletek közötti azonosság alapul szolgálhat érvényes következtetés levonására, hiszen az azonosság két oldalán álló ítéleteknél mindig megvalósul az érvényes következtetések követelménye: Nem lehet olyan eset, hogy az előzmény igaz és a zárótétel hamis. Így tehát, hasonlóan a kontrapozícióhoz, érvényes következtetések lesznek pl. a következők:

$$\begin{array}{ccc} p \vee q & p \mid q & p \\ \text{Tehát: } \bar{p} \rightarrow q & \text{Tehát: } p \rightarrow \bar{q} & \text{Tehát: } \bar{\bar{p}} \end{array}$$

A következtetések felosztása feltételes és szétválasztó szillogizmusokra igen viszonylagos értékű. Az összetett ítéletek közötti

azonosságok alkalmazásával a feltételes szillogizmusokat kifejezhetjük szétválasztó szillogizmusokkal és fordítva. Így pl.

Az elektronoknak vagy elektromos töltésük van, vagy mágneses térben nem hajlanak el.

Az elektronok a mágneses térben elhajlanak.

Tehát:

Az elektronoknak elektromos töltésük van.

Példánkat így formalizálhatjuk:

$$\begin{array}{l} p \vee \bar{q} \\ q \\ \text{Tehát: } p \end{array}$$

Ez a szétválasztó szillogizmus tagadva állító módozata. Ha a $p \vee \bar{q} = \bar{p} \to \bar{q}$ azonosságot alkalmazzuk, szillogizmusunk a következő formát ölti:

$$\begin{array}{l} \bar{p} \to \bar{q} \\ q \\ \text{Tehát: } p \end{array}$$

Fenti következtetés viszont már modus tollens formájú feltételes szillogizmus. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy bármely szétválasztó szillogizmust kifejezhetünk feltételes szillogizmus formájában az ítéletekre vonatkozó azonosságok alkalmazásával.

$$\begin{array}{lll} 1. & p \vee q & \\ & \bar{p} & \\ \text{Tehát:} & q & \end{array} \Bigg\} = \Bigg\{ \begin{array}{ll} & \bar{p} \to q \\ & \bar{p} \\ \text{Tehát:} & q \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2. & p \vee q & \\ & \bar{q} & \\ \text{Tehát:} & p & \end{array} \Bigg\} = \Bigg\{ \begin{array}{ll} & \bar{p} \to q \\ & \bar{q} \\ \text{Tehát:} & p \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 3. & p|q & \\ & p & \\ \text{Tehát:} & \bar{q} & \end{array} \Bigg\} = \Bigg\{ \begin{array}{ll} & p \to \bar{q} \\ & p \\ \text{Tehát:} & \bar{q} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4. & p|q \\ & q \\ \text{Tehát:} & \bar{p} \end{array} \Bigg\} = \Bigg\{ \begin{array}{ll} & p \to \bar{q} \\ & q \\ \text{Tehát:} & \bar{p} \end{array}$$

Ha ehhez a négy feltételes szillogizmushoz hozzá vesszük a $p \to q$ felsőtétellel lehetséges állító és tagadó módozatot, valamint a $\bar{p} \to \bar{q}$ (ami azonos a $q \to p$ tétellel) felsőtétellel lehetséges állító és tagadó módozatot, akkor összesen nyolc variációt kapunk, és ezzel megkapjuk a két ítéletből képezett feltételes szillogizmusok összes lehetséges variációját. Ennek megfelelően a szétválasztó szillogizmusok azonosak olyan feltételes szillogizmusokkal, ahol az elő- vagy utótagban tagadás van.

GYAKORLATOK:

35. Állapítsuk meg az alábbi következtetésekről, milyen típusúak. Formalizáljuk a következtetésben szereplő ítéleteket és írjuk fel a következtetés logikai képletét:

Ha 306 121 osztható hárommal, akkor a 3, 0, 6, 1, 2, 1 számok összege osztható hárommal.
A 3, 0, 6, 1, 2, 1 számok összege nem osztható hárommal.
Tehát:
A 306 121 nem osztható hárommal.

Vagy nem termel selejtes árut a brigád, vagy nem nyerheti meg a munkaversenyt.
A brigád selejtes árut termel.
Tehát:
A brigád nem nyerheti meg a munkaversenyt.

Az Angara folyó a Bajkál-tó vizét táplálja vagy a Bajkál-tóból ered.
Az Angara folyó a Bajkál-tóból ered.
Tehát:
Az Angara folyó a Bajkál-tó vizét nem táplálja.

36. Állapítsuk meg az alábbi következtetésekről, érvényes következtetések-e?

N. N. nem lesz bajnok, ha nem nyeri meg ezt a játszmát.
N. N. megnyeri ezt a játszmát.
Tehát:
N. N. bajnok lesz.

Ha az orosz nyelvben a főnév a mondat alanya, akkor az orosz nyelvben a főnév alanyesetben áll.
Tehát:
Ha az orosz nyelvben a főnév alanyesetben áll, akkor a főnév a mondat alanya.

Vagy egyenlőek a négyzet szembenfekvő oldalai, vagy nem párhuzamosak az oldalai.
A négyzet szembenfekvő oldalai egyenlőek.
Tehát:
A négyzet oldalai párhuzamosak.

A sofőr nem kellő időben fékezett vagy nem tartotta be a követési távolságot.
A sofőr nem kellő időben fékezett.
Tehát:
A sofőr betartotta a követési távolságot.

37. Helyettesítsük az alábbi következtetés formulákban p-t az „Algír Afrikában van" ítélettel, q-t az „Aki Algírba utazik, az Afrikába utazik" ítélettel. Állapítsuk meg, mikor kapunk igaz zárótételt, mikor hamisat. Vizsgáljuk meg:

a) igaz zárótétel esetén, hogy az logikailag szükségszerűen következik-e az előzményekből,

b) hamis zárótétel esetén a következtetés logikai helytelensége vagy valamelyik kiinduló tétel hamis volta az oka a zárótétel hamisságának.

$p \to q$	$\bar{p} \mid \bar{q}$	$p \mid \bar{q}$	$\bar{p} \vee q$
p	$\bar{p}$	p	$\bar{q}$
Tehát: $\bar{q}$	Tehát: q	Tehát: q	Tehát: p

2.3. KÖVETKEZTETÉSEK ÉRVÉNYESSÉGÉNEK VIZSGÁLATA TÁBLÁZATOS MÓDSZERREL

Több olyan eljárás létezik, amelynek alkalmazásával bármely olyan következtetésről, amely az ítéletek durvaszerkezete közötti összefüggéseken alapul, eldönthető, hogy érvényes következtetés-e vagy sem. Az egyik ilyen eldöntési eljárás az alábbiakban ismertetett, ún. táblázatos eljárás.

Mint tudjuk, érvényes következtetés az olyan következtetés, ahol a premisszák igazsága esetén a zárótétel logikailag szükségszerűen igaz. Tehát ahol nem lehet olyan eset, hogy a premisszák igazak és a zárótétel hamis.

Miért állíthatjuk pl., hogy a modus ponens érvényes következtetési eljárás?

A következtetés azért érvényes, mert $p \to q$ és p premisszák együttes igazsága esetén igaz a q tétel is. Ha a premisszák igazak, igaz konjunkciójuk is. Tehát $(p \to q) \wedge p$ formula igazságtáblázata adja a premisszák együttes igazságának táblázatát.

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	p
i	i	i		i
i	h	h		h
h	i	i		h
h	h	i		h

Ha ezekből az előzményekből valóban következik q zárótétel, akkor q ítélet igaz, ha a premisszák együttese igaz.

$(p \rightarrow q) \wedge p$	q
i	i
h	i
h	h
h	h

Valóban így is van. A bekeretezett rész mutatja, hogy a premisszák együttes igazsága esetén igaz a zárótétel. Tehát a következtetés logikailag helyes.

Példánk alapján elsajátíthatjuk a következtetések érvényességének eldöntésére szolgáló módszer technikáját. Meg kell állapítani, hogy a premisszák konjunkciójának igazsága esetén igaz-e a zárótétel. Ha van olyan eset, hogy a premisszák igazak és a zárótétel hamis, akkor a következtetési eljárás nem helyes. Pl.:

$$p \rightarrow q$$
$$\bar{p}$$
Tehát: $\bar{q}$

A premisszák konjunkciójának értéktáblázata:

$(p \rightarrow q) \wedge$		$\bar{p}$
i	h	h
h	h	h
i	i	i
i	i	i

A zárótétel értéktáblázata:

$\bar{q}$
h
i
h
i

Igaz-e a premisszák igazsága esetén a zárótétel?

$(p \to q) \wedge \bar{p}$	$\bar{q}$
h	h
h	i
$\boxed{i}$	$\boxed{h}$
i	i

A bekeretezett résznél látható, hogy van olyan eset, amikor a premisszák igazak és a zárótétel hamis, tehát fennállhat az, hogy igaz tételekből hamis tételre következtetünk, ezért a következtetési eljárás logikailag nem helyes.

A táblázatos módszert másképpen is alkalmazhatjuk. Mint tudjuk, a következtetésben azt állítjuk, hogy *ha* az előzmények fennállnak, *akkor* fennáll a zárótétel. *Ha* az előzmények igazak, *akkor* igaz a zárótétel. Ezért a következtetési formáknak olyan implikáció feleltethető meg, ahol az implikáció előtagja a premisszák konjunkciója, az implikáció utótagja a következtetés zárótétele.

Az előzmények konjunkciójának a zárótétellel való implikációját a *következtetés érvényformulájának* nevezzük. *Az érvényes következtetések érvényformulái mindig-igaz formulák.*

Állapítsuk meg a modus ponens érvényességét érvényformulájának vizsgálata alapján. Az érvényformula a premisszák konjunkciójának a zárótétellel való implikációja. Tehát a modus ponens érvényformulája: $[(p \to q) \wedge p] \to q$

Számítsuk ki a formula értékét:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p]$	$\to$	q
i	i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	h	i	i
h	i	i	h	h	i	h
h	h	i	h	h	i	h

Az implikáció alatt mindig igaz áll, nincs olyan eset, hogy az előtag igaz és az utótag hamis, tehát a modus ponens érvényes következtetés. Mit látunk a nem érvényes következtetések esetében?

Például: $p \vee q$
$\quad\quad p$
Tehát: $\bar{q}$
Érvényformulája:
$[(p \vee q) \wedge p] \rightarrow \bar{q}$

Az érvényformula igazságtáblázata:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge p$	$[(p \vee q) \wedge p]$	$\rightarrow$	q
i	i	i	i		i	
i	h	i	i		h	
h	i	i	h		i	
h	h	h	h		i	

Nem-mindig-igaz formula. Tehát a következtetés logikailag helytelen.

Bonyolult, sok elemi ítéletből álló következtetések esetében célszerű a táblázatos módszer lerövidítése. Ezt az ún. ellenkezőjével való bizonyítással érhetjük el. Tudjuk, a következtetés akkor nem helyes, ha érvényformulája nem mindig-igaz, vagyis az implikáció hamis értéket is felvesz. Tételezzük fel, hogy az implikáció hamis. Ehhez fel kell tételezni, hogy az utótag hamis és az előtag igaz. Ha be tudjuk bizonyítani, hogy az utótag hamissága esetén az előtag is hamis, bebizonyítottuk, hogy az implikáció nem veszi fel a hamis értéket, tehát mindig-igaz formula, és így a következtetés érvényes következtetés.

Felveheti a hamis értéket a $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ formula? (Tisztán feltételes szillogizmus érvényformulája.) E formula

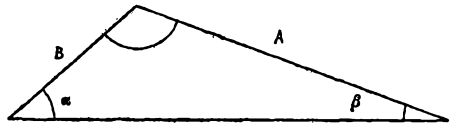
hamis, ha van olyan eset, hogy $(p \to r)$ hamis és $(p \to q) \wedge (q \to r)$ igaz. Fennállhat ez?

Ahhoz, hogy $p \to r$ hamis legyen, p-nek igaznak, r-nek hamisnak kell lennie. Ez esetben azonban az előzmények valamelyike hamis lesz. Ugyanis ha q igaz, akkor hamis a $q \to r$, ha viszont a q hamis, akkor hamis a $p \to q$. Így, mivel a konjunkció valamelyik tagja hamis, a konjunkció nem lehet igaz, tehát nem lesz olyan eset, hogy igaz implikál hamisat.

$$\begin{array}{ccccccccc}
[(p & \to & q) & \wedge & (q & \to & r)] & \to & (p \to r) \\
i & & & & h & & & i & h \\
& & & & & & & & h \\
[(p & \to & q) & \wedge & (q & \to & r)] & \to & (p \to r) \\
i & & & h & & h & & i & h \\
& & & & i & & & & h \\
[(p & \to & q) & \wedge & (q & \to & r)] & \to & (p \to r) \\
i & & h & & h & & h & i & h \\
& h & & & & i & & & h \\
& & & h & & & & & \\
& & & & & & i & &
\end{array}$$

Az eddigi példák esetében az érvényesség táblázatos módszer alkalmazása nélkül is könnyen eldönthető, sőt az ilyen igazolás egyszerűbb, érthetőbb is. A tudományos életben — de még a hétköznapi életben használt következtetések között is — a fentieknél jóval bonyolultabb, összetettebb következtetések is előfordulnak. Ezek érvényességének igazolásánál már valóban megmutatkozik a modern logikában kidolgozott módszerek, közöttük pl. a táblázatos módszer előnye. A bonyolult következtetéseknél ugyanis igen nehéz, sőt nemegyszer gyakorlatilag lehetetlen lenne azoknak a feltételes, szétválasztó stb. szillogizmusoknak a rekonstruálása, amelyek eredményeként a következmény létrejött.

Vegyünk a geometria területéről egy viszonylag egyszerű példát olyan következtetésre, amelynek érvényességét igen nehéz lenne eldönteni kiszámítási eljárás nélkül, ellenben a táblázatos módszer eszközével viszonylag könnyen igazolható.



Egyszerű geometriai igazság, hogy ha egy háromszög két szöge közül az egyik (α) nagyobb, mint a másik (β), akkor az (α) szöggel szemben fekvő oldal (A) is nagyobb a másik (B) oldalnál. Milyen kiinduló tételekből kaptuk ezt a következtetést?

A premisszák a következők:

1. Ha $A > B$, akkor $\alpha > \beta$
2. Ha $A = B$, akkor $\alpha = \beta$
3. Ha $A < B$, akkor $\alpha < \beta$
4. Vagy $A > B$, vagy $A = B$, vagy $A < B$
5. $\alpha > \beta$ kizárja azt, hogy $\alpha < \beta$
6. $\alpha > \beta$ kizárja azt, hogy $\alpha = \beta$

E hat premissza együttesen elegendő ahhoz, hogy belőlük logikai szükségszerűséggel következtessünk a „Ha α nagyobb, mint β, akkor A nagyobb mint B" ítélet igazságára.

Írjuk fel e következtetésmód érvényformuláját. Jelöljük a következtetésben szereplő ítéleteket betűkkel:

$$p = A > B$$
$$q = A = B$$
$$r = A < B$$
$$s = \alpha > \beta$$
$$u = \alpha = \beta$$
$$z = \alpha < \beta$$

Ez esetben a következtetést kifejező érvényformula:

$$[(p \to s) \wedge (q \to u) \wedge (r \to z) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (s \mid u) \wedge (s \mid z)] \to (s \to p)$$

A táblázatos módszer rövidített alkalmazásával könnyen kimutatható, hogy e formula mindig-igaz. Ha ugyanis feltételezzük,

hogy a formula hamis, akkor az implikáció előtagjának igaz értéket, utótagjának hamis értéket kell felvennie. Az implikáció utótagja $(s \to p)$ csak akkor hamis, ha s = igaz, p = hamis. Ez esetben viszont az implikáció előtagja nem veheti fel az igaz értéket. Ennek kiszámításánál az implikáció előtagját képező konjunkciós tagok értékeit a következő sorrendben állapítottuk meg: 1, 5, 2, 4, 3, 6.

$$[(p \to s) \wedge (q \to u) \wedge (r \to z) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (s|u) \wedge (s|z)] \to$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} h & i & h & h & i & i & h & h & i & i & h & i & i \\ & i & & i & & i & & i & & i & & h & \end{array}$$

$$\to (s \to p)$$

$$\begin{array}{cc} i & h \\ & h \end{array}$$

GYAKORLATOK:

38. Táblázatos módszer alkalmazásával ellenőrizzük, jól oldottuk-e meg e fejezet 2. sz. gyakorlatát.

Rövidített módszer alkalmazásával állapítsuk meg, érvényes következtetések formulái-e az alábbi lemmás következtetések érvényformulái:

$$\begin{array}{ll} & (p \to q) \wedge (r \to z) \\ & \bar{p} \vee \bar{r} \\ \text{Tehát:} & \bar{q} \vee \bar{z} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & (p \to q) \wedge (r \to z) \wedge (k \to n) \\ & \bar{q} \vee \bar{z} \vee \bar{n} \\ \text{Tehát:} & \bar{p} \vee \bar{r} \vee \bar{k} \end{array}$$

Táblázatos módszer és rövidített módszer alkalmazásával állapítsuk meg, érvényes következtetések-e az alábbiak:

Ha a bálna víziállat, és minden víziállat hal, akkor a bálna hal.
A bálna víziállat, de nem hal.
Tehát:
Nem igaz, hogy minden víziállat hal.

39. Rövidített módszer alkalmazásával állapítsuk meg, helyesek-e az alábbi következtetések:

Sándor társasutazáson vesz részt a nyáron, vagy nem veszi ki a pénzét a bankból.
Ha Sándor látni akarja ebben az évben Párizs nevezetességeit, akkor kiveszi a pénzét a bankból.
Sándor nem vesz részt társasutazáson.
Ha Sándor nem akarja ez évben látni Párizs nevezetességeit és nem veszi ki a pénzét a bankból, akkor Sándor autót akar vásárolni.
Tehát:
Sándor autót akar vásárolni.

Egy értekezlet résztvevőit kell kijelölni az alábbiak alapján:

Ha A részt vesz, akkor B-nek is jelen kell lennie.
Ha B-nek jelen kell lennie, akkor C részvétele felesleges.
Ha C részt vesz, akkor D nem vesz részt.
Ha B-nek jelen kell lennie, akkor E-re is szükség van.
Ha D nem vesz részt, akkor F részvétele szükséges.
Vagy E részvételére nincs szükség, vagy F részvétele szükséges.
Következtethetjük-e a fentiekből, hogy A nem vesz részt vagy C részvétele felesleges?

2.4. KÖVETKEZMÉNYEK LEVONÁSA TÁBLÁZATOS MÓDSZERREL

A táblázatos módszer nemcsak arra használható, hogy következtetések érvényességét igazoljuk, hanem arra is, hogy megállapítsuk, adott premisszákból milyen zárótétel, következmény vonható le.

Például: Arra vagyunk kíváncsiak, hogy $p \triangledown q$, és p premisszákból milyen következtetést lehet levonni q-ra vonatkozóan. Tudva azt, hogy az érvényes következtetésben a premisszák igazsága esetén a zárótételnek igaznak kell lennie, a következőképpen okoskodunk.

Először megállapítjuk, mikor igaz a premisszák együttese.

p	q	$p \triangledown q$	$(p \triangledown q) \wedge p$
i	i	h	h
i	h	i	i
h	i	i	h
h	h	h	h

Ahol a premisszák együttese igaz, ott érvényes következtetés esetében a zárótételnek is igaznak kell lennie. Tehát:

		Előzmények	*Zárótétel*
p	q	$(p \vee q) \wedge p$	
i	i	h	
i	h	$\boxed{i}$	$\boxed{i}$
h	i	h	
h	h	h	

Vagyis a zárótétel akkor igaz, amikor q hamis. Tehát $p \triangledown q$ és p premisszákból levonható következmény: $\bar{q}$. Vegyünk valamivel bonyolultabb premisszákat, vajon ott is le tudunk-e vonni zárótételt?

Legyen a két premissza:

Ha Péter tanul, akkor otthon marad.
Ha sétál, akkor nem marad otthon.

Arra vagyunk kíváncsiak, mi következik ebből a két előzményből Péter tanulásának és sétálásának kapcsolatára vonatkozóan. Formalizáljuk az ítéleteket:

Péter tanul $= p$
Péter otthon marad $= q$
Péter sétál $= r$

Tehát a premisszák

$$p \to q$$
$$r \to \bar{q}$$

Írjuk fel, mikor igaz a premisszák együttese. Három elemi ítéletről lévén szó, nyolc esetet kell megnézni.

p	q	r	$p \to q$	$\bar{q}$	$r \to \bar{q}$	$(p \to q) \wedge (r \to \bar{q})$
i	i	i	i	h	h	h
i	i	h	i	h	i	i
i	h	i	h	i	i	h
i	h	h	h	i	i	h
h	i	i	i	h	h	h
h	i	h	i	h	i	i
h	h	i	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i	i

A premisszák igazsága esetén igaznak kell lenni a zárótételnek is.

$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \bar{q})$		p	r
h		i	i
i	i	i	h
h		i	i
h		i	h
h		h	i
i	i	h	h
i	i	h	i
i	i	h	h

Fenti táblázatból látható, hogy amikor a premisszák igazak, akkor vagy p hamis vagy r hamis, vagy mind a kettő hamis. p-nek és r-nek melyik az a kapcsolata, amely akkor igaz, amikor a kettő közül valamelyik hamis, vagy mind a kettő hamis?

p	r	
i	h	i
h	i	i
h	h	i

p és r fenti követelményeknek megfelelő kapcsolata $p \mid r$ stb. Tehát:

Ha Péter tanul, akkor itthon marad.

Ha sétál, akkor nem marad itthon

ítéletekből következik, hogy Péter vagy tanul, vagy sétál. (A kettő kizárja egymást.)

Bizonyos esetekben zárótétel levonáshoz is alkalmazható a táblázatos módszer lerövidítése.

Állapítsuk meg, milyen következtetés vonható le az alábbi premisszákból:

1. Ha Maigret felügyelő tovább folytatja a nyomozást, akkor új bizonyítékok kerülnek elő.

2. Ha új bizonyítékok kerülnek elő, akkor fény derül a $\frac{z}{x}$ akcióra.

3. Ha fény derül a $\frac{z}{x}$ akcióra, akkor esnek a részvények árai.

4. Ha az, hogy Maigret felügyelő tovább folytatja a nyomozást, maga után vonja, hogy esnek a részvények árai, akkor ha új bizonyítékok kerülnek elő, Maigret felügyelő tovább folytatja a nyomozást.

5. Maigret felügyelő nem folytatja a nyomozást.

Tehát: ?

Állapodjunk meg a jelölésekben:

Maigret felügyelő tovább folytatja a nyomozást $= p$
Új bizonyítékok kerülnek elő $= q$
Fény derül a $\frac{z}{x}$ akcióra $= s$
Esnek a részvények árai $= r$

Az ítéletek formalizálása:

1. $p \to q$
2. $p \to s$
3. $s \to r$
4. $(p \to r) \to (q \to p)$
5. $\bar{p}$

A premisszák együttese:

$$(p \to q) \wedge (q \to s) \wedge (s \to r) \wedge [(p \to r) \to (q \to p)] \wedge \bar{p}$$

Tudjuk, hogy érvényes következtetés esetén, ha a premisszák igazak, a zárótétel is igaz. A premisszák együttese egy konjunkció, amely csak akkor igaz, ha minden tagja igaz. Ebből következik,

hogy $\bar{p}=i$ (ötödik premissza), és ennek alapján a negyedik premisszáról tudjuk, hogy csak akkor lehet igaz, ha $q=h$.

Az első zárótétel, amelyet így kaptunk: *Nem kerültek új bizonyítékok elő.*

Megállapítható-e az s értéke?

A második premisszában s lehet igaz is és hamis is a premissza igazsága esetén.

A harmadik premissza sem határozza meg s igazságát egyértelműen, csak azt, hogy igazsága esetén r-nek is igaz értéket kell felvennie.

De meghatározott-e r igazsága?

A negyedik premisszában r lehet igaz, és lehet hamis, a harmadikban csak azt tudjuk róla, hogy s igazsága esetén igaznak kell lennie.

A fentiek alapján kimondhatjuk, a premisszák nem nyújtanak elégséges alapot s, r igazságának egymás értékétől független megállapításához.

GYAKORLATOK:

40. Állapítsuk meg táblázatos módszer alkalmazásával, mi következik az alábbi előzményekből p igazságára vonatkozóan, r igazságára vonatkozóan.

$$p \vee q$$
$$p|r$$
$$q \triangledown r$$
Tehát: ?

41. Állapítsuk meg táblázatos módszer alkalmazásával, milyen zárótétel következik az alábbi előzményekből:

Vagy a szofista, vagy a tanítványa nyeri meg a pert. Ha a szofista nyer, a tanítványnak — mint vesztesnek — kell fedez-

nie a perköltséget. Ha a tanítvány nyer — tandíjként — fedeznie kell a perköltséget.

Ha egy szám osztható hattal, akkor osztható kettővel.
Ha egy szám négyzete nem páros, akkor a szám nem osztható kettővel.

2.5. KÖVETKEZTETÉSEK ÉRVÉNYESSÉGÉNEK ELDÖNTÉSE NORMÁLFORMÁRA VEZETÉSSEL

Az ismertetett táblázatos módszer segítségével bármely összetett ítéletformuláról el tudjuk dönteni, mindig-igaz formula-e, vagyis következtetésmód érvényformulája, vagy sem. Olyan formulánál azonban, amely sok változót tartalmaz (pl. amelyben 5—6, sőt ennél több különböző elemi ítélet kapcsolata fejeződik ki), ez a módszer nehezen alkalmazható, hiszen már négy változó esetére is 16, nyolc változó esetében pedig már 256 variáció vizsgálatát követeli meg.

A sok változót tartalmazó formulák esetében az igazságérték megállapítására célravezetőbb más módszert, a normálformára vezetés módszerét alkalmazni.

Tudjuk, hogy logikailag helyes következtetések érvényformulái mindig-igaz formulák. Arról is volt már szó, hogy a konjunktív normálformákról, illetve a kitüntetett diszjunktív normálformákról leolvasható, hogy mindig-igaz formulák-e vagy sem. Ezért ha a következtetések érvényformuláit konjunktív, illetve kitüntetett diszjunktív normálformára vezetjük, ezen alakjukról megállapítható, hogy logikailag helyes következtetések formulái-e. A módszer bemutatására elsőnek vegyük a feltételes szillogizmus állító módozatát. Ennek érvényformulája, mint tudjuk, a következő:

$$[(p \to q) \wedge p)] \to q$$

Vezessük konjunktív normálformára a fenti formulát:

$$\overline{[(\bar{p} \vee q) \wedge p]} \vee q$$
$$\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \bar{p} \vee q$$
$$(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p} \vee q$$
$$\underbrace{(p \vee \bar{p} \vee q)}_{i} \wedge \underbrace{(\bar{p} \vee q \vee \bar{q})}_{i} = i$$

Tehát a feltételes szillogizmus állító módozatának érvényformulája mindig-igaz formula. Így bebizonyítottuk e következtetési mód logikai helyességét.

Igazoljuk ugyanennek a következtetésnek az érvényességét kitüntetett diszjunktív normálformára vezetéssel:

$$[(p \to q) \wedge p] \to q$$
$$(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p} \vee q$$
$$(p \wedge \bar{q}) \vee [\bar{p} \wedge (q \vee \bar{q})] \vee [q \wedge (p \vee \bar{p})]$$
$$(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)$$
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = i$$

Második példánk legyen a $[(p|q) \wedge \bar{p}] \to q$ formula. Állapítsuk meg, érvényes következtetés-formulája-e?

$$[(p|q) \wedge \bar{p}] \to q$$
$$\overline{[(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge \bar{p}]} \to q$$
$$\overline{[(\bar{p} \vee q) \wedge \bar{p}]} \vee q$$
$$\overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} \vee \bar{p} \vee q$$
$$(p \wedge q) \vee \bar{p} \vee q$$
$$\underbrace{(p \vee \bar{p} \vee q)}_{i} \wedge \underbrace{(\bar{p} \vee q)}_{i?\quad h?}$$

Mivel a konjunktív normálformában van olyan konjunkciós tag, amelyben egyetlen változó sem szerepel, negálva is és negálatlanul is, a formula nem mindig-igaz. Ha a formulát (az utolsó lépés

elhagyásával) nem konjunktív normálformára, hanem kitüntetett diszjunktív normálformára vezetjük, a következőt kapjuk:

$$(p \wedge q) \vee \bar{p} \vee q$$
$$(p \wedge q) \vee [\bar{p} \wedge (q \vee \bar{q})] \vee [q \wedge (p \vee \bar{p})]$$
$$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

Látható, hogy a formula nem-mindig-igaz, mivel nem tartalmazza két változó összes lehetséges konjunkciós kapcsolatát. (Hiányzik: $p \wedge \bar{q}$.) Tehát a $(p|q) \wedge \bar{p}$ premisszából nem következik q zárótétel.

Valamely következtetés érvényességének eldöntésénél jól használható módszer a formula lerövidítése. A 109. oldalon elemezett példából induljunk ki. E következtetés érvényformuláját normálformára vezetjük:

$$[(p \to s) \wedge (p \to t) \wedge (r \to z) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (s|t) \wedge \wedge (s|z)] \to (s \to p)$$
$$\overline{[(\bar{p} \vee s) \wedge (\bar{q} \vee t) \wedge (\bar{r} \vee z) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\bar{s} \vee \bar{t}) \wedge \wedge (\bar{s} \vee \bar{z})]} \vee \bar{s} \vee p$$
$$\overline{(\bar{p} \vee s)} \vee \overline{(\bar{q} \vee t)} \vee \overline{(\bar{r} \vee z)} \vee \overline{(p \vee q \vee r)} \vee \overline{(\bar{s} \vee \bar{t})} \vee \vee \overline{(\bar{s} \vee \bar{z})} \vee \bar{s} \vee p$$
$$(p \wedge \bar{s}) \vee (q \wedge \bar{t}) \vee (r \wedge \bar{z}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (s \wedge t) \vee \vee (s \wedge z) \vee \bar{s} \vee p$$

Ha e diszjunktív normálalakot átalakítjuk konjunktív normálformává (vagy kitüntetett diszjunktív normálformává), meggyőződhetünk a formula azonosan igaz voltáról. Mindkét eljárás azonban elég hosszadalmas. Hogy hamarabb célhoz érjünk, próbáljunk meg más lehetőséget. A fenti diszjunktív normálformát hozzuk rövidített alakra.

$$(p \wedge \bar{s}) \vee (q \wedge \bar{t}) \vee (r \wedge \bar{z}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (s \wedge t) \vee \vee (s \wedge z) \vee \bar{s} \vee p$$

$(p \wedge q) \vee p = p$ azonosság alapján:

$$(q \wedge \bar{t}) \vee (r \wedge \bar{z})] \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (s \wedge t) \vee (s \wedge z) \vee \vee \bar{s} \vee p$$

$p \vee (\bar{p} \wedge q) = p \vee q$ azonosság alapján:
$(q \wedge \bar{t}) \vee (r \vee \bar{z}) \vee (\bar{q} \wedge \bar{r}) \vee t \vee z \vee \bar{s} \vee p$
fenti azonosság ismételt felhasználásával:
$q \vee r \vee \bar{q} \vee t \vee z \vee \bar{s} \vee p$ diszjunkcióhoz jutunk. Mivel a formulában q szerepel negálva és negálatlanul is, a formula értéke mindig-igaz.

GYAKORLATOK:

42. Igazoljuk a feltételes, a szétválasztó, a dilemmás következtetések érvényességét normálformára vezetéssel.

43. Bizonyítsuk be normálformára vezetéssel, hogy nem helyesek az alábbi következtetési eljárások:

$$\begin{array}{lll} p \wedge q & & p \to q \\ \bar{p} \to q & & \bar{q} \to \bar{r} \\ \text{Tehát: } \bar{q} & \text{Tehát:} & r \to p \end{array}$$

44. Állapítsuk meg normálformára vezetéssel, hogy az alábbi következtetések közül melyek logikailag helyesek:

$$\begin{array}{lll} \bar{p} \wedge q & \bar{p} \leftrightarrow q & p \nabla q \\ \text{Tehát: } \bar{p} \leftrightarrow q & \text{Tehát: } \bar{p} \vee q & q \nabla r \\ & & \text{Tehát: } p \nabla r \end{array}$$

45. Állapítsuk meg normálformára vezetéssel, következik-e a zárótétel az előzményekből az alábbi következtetésben:

Az apám csak akkor dicsér meg, ha én is elégedett vagyok magammal. Vagy sokat sportolok, vagy nem vagyok elégedett magammal. Ha rosszul tanulok, nem tudok sokat sportolni.
Tehát:
Ha apám megdicsér, akkor nem tanulok rosszul.

2.6. KÖVETKEZMÉNYEK LEVONÁSA AZONOSSÁGOK FELHASZNÁLÁSÁVAL

Normálformára vezetéssel és az azonosságok felhasználásával nemcsak következtetésmódok érvényességét tudjuk bizonyítani, hanem adott premisszákból zárótételek levonására is lehetőségünk van.

Tulajdonképpen bármely azonosság megállapítása egyben következtetési mód megállapítása is. Hiszen az azonosságok megfelelnek a logikailag helyes következtetés feltételének, vagyis annak, hogy a premisszák igazsága esetén igaz a zárótétel. Az azonosság bármelyik oldalát felfoghatjuk mint premisszát, és ez esetben az azonosság másik oldala a premisszából levont konklúzió lesz.

Például $(p \to q) = (\bar{p} \vee q)$ azonosság megállapítása egyben magában foglalja azt is, hogy $p \to q$-ból következtethetünk $\bar{p} \vee q$-ra, és fordítva, $\bar{p} \vee q$-ból következik $p \to q$ zárótétel. A normálformára vezetés folyamata tehát felfogható úgy is mint egy következtetési láncolat. Ennek megfelelően pl. kiindulva a $(p|q) \wedge p$ formulának megfelelő premisszából következtetünk $\overline{(p \wedge q)} \wedge p$ tételre. Majd ezt premisszaként felhasználva $(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge p$ tételre. Ami egyben az eredeti formula konjunktív normálformája.

A következtetések folyamata azonban nem merül ki a premisszák együttesével ekvivalens tételek megállapításával. A következtetési eljárások többségében a premisszák együttese és a zárótétel között fölé-alárendeltségi viszony áll fenn. Vagyis a premisszák igazságából következik a zárótétel igazsága, de fordítva már nem, a zárótétel igazságából nem következik a premisszák igazsága. Így tehát bizonyos tételek következményeinek megállapítása annak megállapítását is jelenti, hogy melyek a premisszák együttesével alárendeltségi viszonyban levő ítéletek.

Adott premisszáknak megfelelő kitüntetett konjunktív normálformáról leolvasható, hogy ha a premisszák igazak, ezekből mely zárótételek igazsága következik.

I. példa: Arra vagyunk kíváncsiak, hogy p és $p \to q$ formájú premisszákból milyen következmények vonhatók le? Hozzuk ki-

tüntetett konjunktív normálformára a premisszák együttesének megfelelő $p \wedge (p \rightarrow q)$ formulát:

$$p \wedge (p \rightarrow q)$$
$$p \wedge (\bar{p} \vee q)$$
$$(p \vee (q \wedge \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$$
$$(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$$

Tehát ha a $p \wedge (p \rightarrow q)$ igaz, akkor igaz a $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$ formula is. Ez azonban, konjunkcióról lévén szó, csak akkor igaz, ha mindegyik konjunkciós tagja külön-külön igaz. Tehát $p \wedge (p \rightarrow q)$ formulának következménye:

1. $p \vee q$
2. $p \vee \bar{q}$
3. $\bar{p} \vee q$

továbbá:

A kitüntetett konjunktív normálforma első két tagjával ekvivalens, és így a kitüntetett konjunktív normálforma egészéből következik:

4. $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$
   $p \vee (q \wedge \bar{q})$
   p

A kitüntetett konjunktív normálforma első és harmadik tagjával ekvivalens, és így a kitüntetett konjunktív normálforma egészéből következik:

5. $(p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee q)$
   $(p \wedge \bar{p}) \vee q$
   q

II. példa: Ha azt akarjuk tudni, hogy $p \vee q$ és $\bar{p}$ premisszákból milyen következtetést vonhatunk le q-ra vonatkozóan, az I. példá-

ban alkalmazott eljáráshoz hasonlóan okoskodva, választ kaphatunk kérdésünkre:

$$(p \vee q) \wedge \bar{p}$$
$$(p \vee q) \wedge [\bar{p} \vee (q \wedge \bar{q})]$$
$$(p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$$

Tehát $(p \vee q) \wedge \bar{p}$ következményei:

1. $p \vee q$
2. $\bar{p} \vee q$
3. $\bar{p} \vee \bar{q}$
4. $(p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee q)$
   $(p \wedge \bar{p}) \vee q$
   q

Vagyis megállapíthatjuk, hogy $p \vee q$ és $\bar{p}$ premisszákból q-ra vonatkozóan levonható következmény: q.

Kitüntetett konjunktív normálforma felhasználásával megkaphatjuk az adott előzményekből következő *összes* olyan zárótételt, amely a normálformában szereplő elemi ítéleteket tartalmazza. Ezek között azonban láttuk, különböző erősségű tételek vannak (egy részük alárendeltje a többinek). Ezért különösen fontos megtudni, melyek meghatározott előzmények legegyszerűbb következményei. (Ezekhez már nem lehetséges olyan alárendelt tételeket képezni, amelyek következményei lennének az adott előzményeknek.) E legegyszerűbb következmények felkutatásához a formulát rövidített konjuktív normálformára vezetjük:
Például: A premisszák:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow \bar{q} \\ p \vee r \end{array}}{q \wedge r}$$

Melyek a premisszák együttesének legegyszerűbb következményei?

$(p \to \bar{q}) \wedge (p \vee r) \wedge \overline{(q \wedge r)}$
$(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee r) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})$
$(\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee r) = (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ azonosság alkalmazásával,
$(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee r) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{q} \vee r) \wedge (p \vee \bar{q})$
$(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) = p$ azonosság alkalmazásával
$(p \vee r) \wedge \bar{q}$

Tehát a premisszák legegyszerűbb következményei:

1. $p \vee r$
2. $\bar{q}$

Második példának tekintsük a következőt:

A II. b) osztályban Klári, Lajos, Miklós, Nándor közül valaki betörte az ablakot. A tanár „kihallgatást" tart. A következő vallomásokat kapja:

Klári: Lajos törte be az ablakot.
Lajos: Nándor törte be az ablakot.
Miklós: Én nem törtem be.
Nándor: Nem én voltam.

Sándor, aki tudja, ki volt a tettes, és mindig igazat mond, azt mondja, hogy a fenti állítások közül csak egy igaz és csak egy gyerek törte be az ablakot. Ki volt a tettes? Milyen zárótételt kaphatunk a fenti premisszákból?

Jelölések: p = Klári törte be az ablakot.
q = Lajos törte be az ablakot.
r = Miklós törte be az ablakot.
s = Nándor törte be az ablakot.

Mivel csak egy törhette be:

$\overline{(p \wedge q)} \wedge \overline{(p \wedge r)} \wedge \overline{(p \wedge s)} \wedge \overline{(q \wedge r)} \wedge \overline{(q \wedge s)} \wedge \overline{(r \wedge s)}$

Sándornak, aki mindig igazat mond, elhisszük, hogy csak egy állítás lehet igaz: $\overline{(q \wedge s)} \wedge \overline{(q \wedge \bar{r})} \wedge \overline{(q \wedge \bar{s})} \wedge \overline{(s \wedge \bar{r})} \wedge$

$\wedge \overline{(s \wedge \bar{s})} \wedge \overline{(\bar{r} \wedge \bar{s})}$

A két premisszát összekapcsolva és az együttes tagadásokat megszüntetve $(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{s}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{s}) \wedge$ $\wedge (\bar{r} \vee \bar{s}) \wedge (\bar{q} \vee r) \wedge (\bar{q} \vee s) \wedge (\bar{s} \vee r) \wedge (\bar{s} \vee s) \wedge (r \vee s)$ formulát kapjuk.

A konjunkció 5. és 8., 6. és 9., 9. és 10. tagjánál a $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) = p$ azonosságot alkalmazva:

$(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{s}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r}) \wedge \bar{q} \wedge \bar{s} \wedge r.$

A $p \wedge (\bar{p} \vee q) = p \wedge q$ azonosságot alkalmazva a 2. és 7. tagnál:

$(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r}) \wedge \bar{q} \wedge \bar{s} \wedge r \wedge \bar{p}.$

A $p \wedge (p \vee q) = p$ azonosságot többszörösen alkalmazva:

$\bar{q} \wedge \bar{s} \wedge r \wedge \bar{p}$ rövidített konjunktív normálformát kapjuk.

Ez azt jelenti, hogy az adott premisszák következményei:

1. q = Nem Klári törte be az ablakot.
2. $\bar{s}$ = Nem Lajos törte be az ablakot.
3. $\bar{p}$ = Nem Nándor törte be az ablakot.
4. r = Miklós törte be az ablakot.

GYAKORLATOK:

46. Állapítsuk meg kitüntetett konjunktív normálformára vezetéssel, milyen zárótételek következnek az alábbi előzményekből:

$p \vee q$	$\bar{p} \to q$
$p \to \bar{r}$	$q \to r$
$p \to q$	$\bar{q} \to p$
Tehát: ?	Tehát: ?

47. Milyen kapcsolat állapítható meg a „Péter ösztöndíjat kap" és „Péter sokat tanul" ítéletek között az alábbi premisszák igazsága esetén:

Ha súgnak Péternek, akkor felfüggesztik a vizsgáját.
Akkor súgnak Péternek, ha nem tanul sokat.
Ha felfüggesztik Péter vizsgáját, akkor nem kap ösztöndíjat.

2.7. A KÖVETKEZMÉNYFOGALOMRÓL

Az előzőekben a következtetések érvényformuláit olyan implikációnak feleltettük meg, ahol az előzmények konjunkciója az implikáció előtagja, a zárótétel az implikáció utótagja. Ez az jelenti, hogy a következtetések érvényességének vizsgálatát visszavezettük az implikációk igazságértékének vizsgálatára.

De az implikációról már tudjuk, hogy csak absztraktan általánosítva felel meg a tényleges emberi gondolkodás egy ítélettípusának. Hogyan áll akkor a helyzet a következtetéssel, mennyiben feleltethető meg ez a következményfogalom a megismerő gondolkodás következtetéseinek?

Az implikációval kapcsolatban az első probléma az volt, hogy olyan esetre is értelmezi a „ha-akkor" ítéletet, amikor ez valójában nem használatos. Arról az esetről van szó, amikor az előtag hamis és az utótag igaz, továbbá amikor az elő- és az utótag is hamis. Következtetés viszonylatában ez azt jelenti, hogy olyan következtetésről van szó, ahol az előzmény hamis. Valójában szoktunk-e hamis előzményekkel következtetni? Igen, szoktunk, sőt azt kell mondani, hogy a tudomány fejlődéséhez szükség is van ilyen következtetésekre. Nevezetesen pl. a hamis előzményekkel való következtetés lehetőséget ad e hamis tételek cáfolatára. (Lásd a cáfolattal foglalkozó részt, 265. old.)

Nehezebben védhető az a körülmény, hogy az implikációval ábrázolt következtetésnél nem bizonyítottan hamis az a tétel, amely hamis tételből következik. Továbbá, mivel igaz tételt kaphatunk nemcsak igaz, hanem hamis tételekből is, ezért valamely tétel igazsága nem biztosítja azt, hogy azok a tételek, amelyekből az igaz tételt levezettük, valóban igazak voltak.

Ez valóban olyan körülmény, amelynek a fennállásával számolni kell. A megismerésben valóban fontos tudni, hogy a következtetéssel kapott ítélet igaz vagy hamis. Az implikációval reprezentálható következményfogalom nem tud választ adni a zárótétel igazságára vonatkozóan, ha az előzmény hamis, vagy igazsága nem ismert. Ezért a következtetés érvényességének igazolásával nem teremtjük meg minden feltételét a hamis tételek kiküszöbölésének a megismerésből; csak azok a hamis tételek hullanak ki a rostán, amelynél a hamis tételeket igaz tételekből helytelen logikai eljárással kapnánk.

Az ítéletek vizsgálatánál szó volt már arról is, hogy az összetett ítéletek formuláiba olyan tények közötti kapcsolatok is behelyettesíthetők, amely tények között valójában nem szoktunk kapcsolatot állítani.

Igaz implikációs ítélet lesz pl. — mivel az implikáció elő- és utótagja is igaz — a következő: „Ha a kutya emlősállat, akkor március 31 napos hónap". Milyen kihatással van a kijelentéslogika ítéletformuláinak ez az elvont jellege az implikáció műveletével ábrázolható következtetési eljárásokra?

Induljunk ki az alábbi példából:

Ha a kutya emlős, akkor eleven utódokat szül.
A kutya emlős.
Tehát:
Vagy eljutunk más bolygóra, vagy nem jutunk el más bolygóra.

Formalizálva:

$$p \rightarrow q$$
$$p$$
$$\text{Tehát: } r \vee \bar{r}$$

Érvényes-e ez a következtetés?

p	q	r	$[(p \to q) \wedge p] \to (r \vee \bar{r})$			
i	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*

Mivel $r \vee \bar{r}$ mindig-igaz ítélet, ezért a következtetés érvényes, hiszen mindig-igaz tétel bármely tételből következik. Ez a *bármely* mármost azt jelenti, hogy nemcsak vele tartalmilag összefüggő akár igaz, akár hamis tételből, hanem tőle tartalmilag teljesen független ítéletből is következik.

Tehát a kijelentéslogika szabályai szerint a fenti következtetés példa érvényes *következtetés* példája. De ha megkérdeznénk a hétköznapi, józan gondolkodású embert, hogy szerinte abból, hogy ha a kutya emlős, akkor eleven utódokat szül, és, hogy a kutya emlős állat, *következik-e* az a tény, hogy vagy eljutunk más bolygóra vagy sem, a válasz nyilvánvalóan tagadó lenne. A „következtetés" tényébe ugyanis nemcsak azt érezzük beletartozónak, hogy igaz tételekből érvényes logikai eljárással levezethető legyen, hanem hogy *tartalmi* kapcsolat álljon fenn egyrészt azon tételek között, amelyekből tételünket levezettük, másrészt tartalmi kapcsolat álljon fenn az előzmények és a zárótétel között. (Eddigi vizsgálódásainkban ezt hallgatólagosan mindig feltételeztük. Lásd pl. 110. old.)

Az implikációval formalizált következményfogalom ezt a követelményt nem tudja kielégíteni. Nem tudja kizárni a „következtetések" közül azokat, ahol az érvényesség teljesül, de tartalmi kapcsolat nem áll fenn az ítéletek között. Mindez ismételten csak azt bizonyítja, hogy az ítéletek durvaszerkezetének logikája nem adja az élő, eleven gondolkodást a maga teljességében, hanem csak egy metszetében. Kihullnak rostáján a helyes gondolkodásban nem megengedhető bizonyos szemcsék, de még marad feladat a következő, finomabb eszközökkel való rostálás számára is. Fontos azonban megérteni, hogy a munka nem mindig ugyanaz marad. A munkában előre haladunk. Nem a danaidák soha előbbre nem jutó munkáját végezzük.

3. AZ ÁRAMKÖRÖK LOGIKÁJA

A modern logika egyik legnagyobb eredménye, hogy közvetlen kapcsolatot teremtett a logikai elmélet és a gyakorlat között. Az utat az ún. áramkörök logikájának felfedezése nyitotta meg. A logikai törvények és az áramkörök közötti analógiák lehetőségére először *P. Ehrenfeszt* osztrák tudós utalt 1912-ben. Az 1930-as években *V. Sesztakov* szovjet fizikus és *C. E. Shannon* amerikai matematikus — egymástól függetlenül — felismerte, hogy villamosmérnöki feladatok megoldásánál használhatók a modern logika eredményei.

Az elektromos kapcsolók zárt vagy nyitott állapotban lehetnek; zárt állapot esetén az elektromos áram eljut a fogyasztóhoz (pl. az áramkörre kapcsolt lámpa ég), nyitott állapotban nem. Az elektromos kapcsolóknak tehát két állapota lehet (nyitott, zárt), hasonlóan ahhoz, ahogy minden ítéletnek két lehetséges értéket tulajdonítunk (igaz, hamis). Az első analógia ebből adódik. A kapcsoló zárt állapotának feleltetjük meg az ítélet igaz voltát, nyitott állapotának az ítélet hamis voltát.

Ahogyan az összetett ítéletek különböző ítéletkapcsolatokat tartalmazhatnak (különböző logikai műveletek eredményei lehetnek), az elektromos áramkörökben különböző kapcsolási módok lehetségesek. A kapcsolási módok és a logikai műveletek szintén

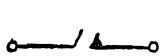
analóg vonásokat mutatnak. A sorbakapcsolt áramkör megfeleltethető a konjunkció, a párhuzamos kapcsolás a diszjunkció műveletének.

Állapodjunk meg a jelölésekben. Az áramkörök kapcsolóit

jellel jelöljük. Ezt a jelet akkor használjuk, ha nem határozzuk meg, hogy a kapcsoló nyitott vagy zárt állapotban van. Ha a kapcsoló nyitott voltát akarjuk ábrázolni, a

jelet használjuk, ha a kapcsoló zárt, a

jelet használjuk. Azt, hogy a kapcsoló áramforrással és fogyasztóval össze van kötve, a kapcsoló végén két kis karikával jelezzük:

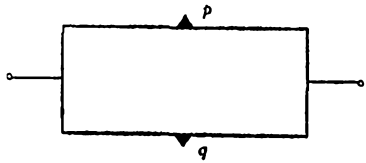


Miért feleltethető meg a konjunkció művelete a soros, a diszjunkció művelete a párhuzamos kapcsolásnak?

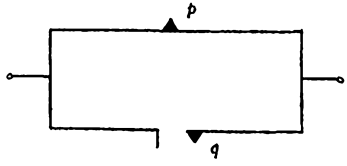
Mint tudjuk, a konjunkció akkor igaz, ha minden tagja igaz, és az ítélet igaz tagjainak az áramkör egy-egy zárt kapcsolója felel meg. Az áramkör a soros kapcsolásnál akkor van zárva, ha minden kapcsoló zárt állapotban van.

Ahhoz, hogy L lámpa égjen, az szükséges, hogy a p és a q kapcsoló zárt állapotban legyen.

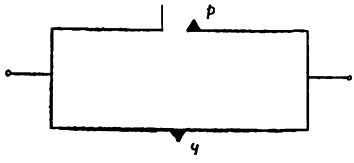
A diszjunkció akkor igaz, ha a diszjunkciós tagok közül legalább egy igaz. A párhuzamosan kapcsolt kapcsolók közül az egyik kapcsoló zárása elegendő az áramkör zárásához.



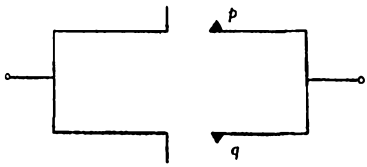
A lámpa ég, ha p és q kapcsoló zárt állapotban van,



ha p zárva és q nyitva van,

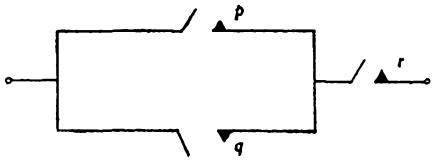


ha p nyitva van és q zárva van,

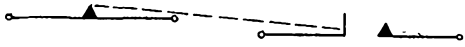


nem ég a lámpa, ha p nyitva van és q is nyitva van.

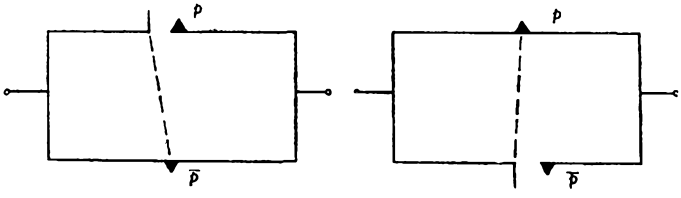
Áramkörrel olyan ítéletformula is ábrázolható, amelyben diszjunkció is és konjunkció is szerepel. Például $(p \vee q) \wedge r$ kapcsolási rajza.



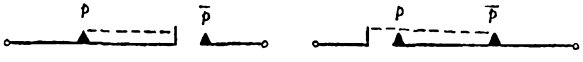
Egy ítélet és annak negációja két olyan kapcsolóval ábrázolható, amelyek közül valamelyik zárt, a másik pedig nyitott.



Ha az egyik kapcsolót zárjuk, a másik kinyit, és fordítva. Az ellentétesen működő kapcsolók párhuzamos kötése esetén az áramkör mindig zárt állapotban lesz. Ez megfelel a $p \vee \bar{p} = i$ azonosságnak.

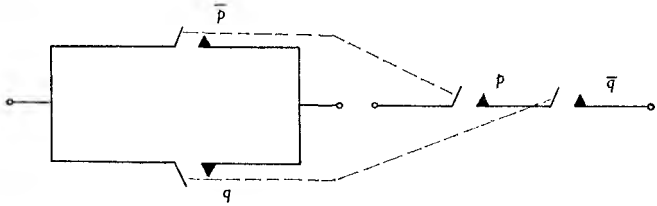


Az ellentétesen működő kapcsolók sorbakötése esetén az áramkör nem lehet zárt állapotban. Ez megfelel a $p \wedge \bar{p} = h$ azonosságnak.



Azonosságok alkalmazásával bármely ítélet kifejezhető diszjunkció, konjunkció és negáció segítségével, ezért bármely ítélet-

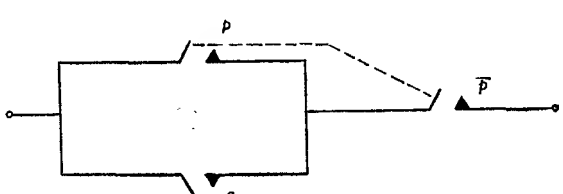
formulának megfelelő áramkör létesíthető. Így pl. a $p \to q = \bar{p} \vee q$ azonosság alapján a $p \to q$ áramköre:



Az áramkörök és az ítéletformulák közötti analógiák lehetővé teszik, hogy áramkörök segítségével logikai problémákat megoldjunk. Tudjuk, hogy logikailag helyes következtetéseknek mindig-igaz formulák felelnek meg. Így az érvényes következtetéseket ábrázoló áramkörök mindig zártak, függetlenül attól, hogy a bennük szereplő kapcsolók nyitott vagy zárt állapotban vannak.

Áramkörökről pl. az is leolvasható, hogy adott ítéleteknek milyen következményei vannak. Adott ítéleteknek (premisszáknak) következményei azok az ítéletek, amelyek igazak akkor, amikor a premisszák igazak. Ez a kapcsolók nyelvén azt jelenti, hogy az áramkör zárt állapotában a zárt kapcsolóknak megfelelő ítéletek következményei annak az ítéletnek, amelyet az áramkör egésze reprezentál. Lássunk erre egy egészen egyszerű és egy valamivel bonyolultabb példát.

1. Mi a következménye a $p \vee q$ és $\bar{p}$ premisszáknak? A premisszák konjunkciójának megfelelő áramkör:



Látható, hogy az áramkör csak akkor lehet zárt állapotban, ha q zárva van. A $\bar{p}$-nek ugyanis, mivel sorba van kapcsolva, zárva kell lenni, de akkor már csak q felé haladhat az áram!

2. „Ma logikaóra van vagy filozófiaóra van.
Ha ma logikaóra van, akkor a logikaóra előtt el kell készíteni a logika házi feladatot.
Ha ma filozófiaóra van, akkor nem megyünk haza 5 óra előtt.
Hazamegyünk 5 óra előtt."

Milyen következmény adódik ezeknek az előzményeknek az együtteséből? Jelöljük a különböző elemi ítéleteket különböző betűkkel:

l = Ma logikaóra van.
f = Ma filozófiaóra van.
k = A logikaóra előtt el kell készíteni a házi feladatot.
m = 5 óra előtt hazamegyünk.

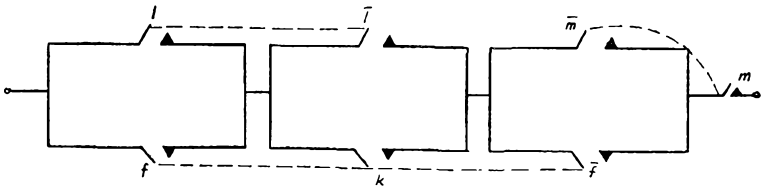
A premisszáknak megfelelő formula:

$$(l \vee f) \wedge (l \to k) \wedge (f \to \bar{m}) \wedge m$$

Ebből a $p \to q = \bar{p} \vee q$ azonosság alkalmazásával kapott formula:

$$(l \vee f) \wedge (\bar{l} \vee k) \wedge (\bar{f} \vee \bar{m}) \wedge m$$

Tervezzük meg az áramkört:



Az áramkör zárt állapotban csak a következő kapcsolók zártsága esetén lehet: l, k, $\bar{f}$, m. Tehát az előzményekből következő tételek:

1. Ma logikaóra van.
2. A logikaóra előtt el kell készíteni a logika házi feladatot.
3. Ma nincs filozófiaóra.
4. Ma hazamegyünk 5 óra előtt.

Természetesen amíg egyszerű áramkörökről van szó, ezek megtervezéséhez nincs szükség matematikai, logikai segédletre. Ám bonyolult elektromos gépek, űrhajók, vagy egy telefonközpont áramköre rengeteg kapcsolóból, bonyolult működési feltételekből tevődik össze, az ennek megfelelő áramkör létrehozásához már szinte elengedhetetlen a modern logika.

Minden áramkör működési feltételei kifejezhetők ítéletekben. Így valamely áramkör megtervezésének feladata visszavezethető az áramkör működési feltételeit kifejező ítéletnek megfelelő — az adott szempontból legegyszerűbb — logikai formula megtalálására. E tény szemléltetésére induljunk ki először egy viszonylag igen egyszerű műszaki feladatból.

A televízió „Ki mit tud?" vetélkedő elődöntőjében háromtagú zsüri dönt a középdöntőbe jutásról. Csak az a versenyző juthat tovább, aki szavazattöbbséget kap. Minden zsüritag egy kapcsoló lenyomásával jelzi, ha a továbbjutásra szavaz. Egy lámpa kigyulladása jelzi, ha a versenyző továbbjut. A kérdés az, hogyan kell az áramkört megtervezni, hogy a lámpa akkor és csak akkor gyulladjon ki, ha a versenyző továbbjutott?

Formalizáljuk a lámpa kigyulladásának feltételeit jelző ítéletet:

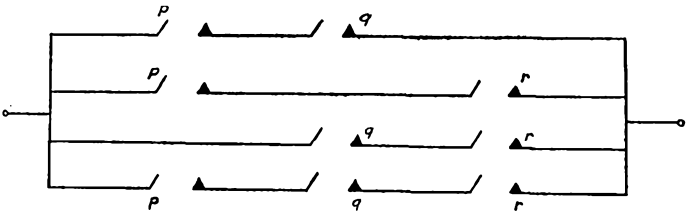
p = Az első zsüritag a továbbjutásra szavaz.

q = A második zsüritag a továbbjutásra szavaz.

r = A harmadik zsüritag a továbbjutásra szavaz.

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

A formulának megfelelő áramkör:



Tehát minden zsüritag három kapcsolót mozgat, amelyek között mechanikus szigetelő összeköttetés van létesítve, hogy egyszerre működjenek (pl. a szigetelő nyélen három kés kapcsolódik össze,

vagy egy hármas kapcsoló közös tengelyen működik). A feladat az, hogy csökkentsük a felhasznált kapcsolók (jelen esetben 9) számát. Ezt a formula egyszerűsítésével elérhetjük. A $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee$ $\vee (q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ azonos igazságértékű formulája:

$$[p \wedge (q \vee r)] \vee (q \wedge r).$$

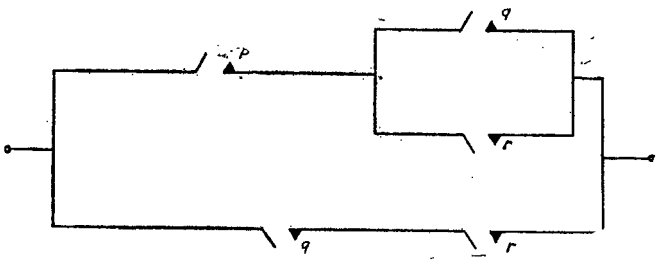
Az utolsó tag $p \wedge q \wedge r$ ugyanis elhagyható, mert ez csak akkor igaz, ha az előző tagok már igazak, és a diszjunkció igazságértékén nem változtat, hogy ha nem egy, hanem több tagja igaz. (Igazságához elegendő egy tag igazsága.) Tehát:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) =$$
$$= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r).$$

Ez utóbbi formula első két diszjunkciós tagjából kiemelhetjük a közös p tagot, így kaptuk a

$$[(p \wedge (q \vee r)] \vee (q \wedge r) \text{ formulát.}$$

A fenti formulának megfelelő áramkörben már csak öt kapcsoló szerepel, így az ítéletforma átalakításával négy kapcsolót sikerült megtakarítanunk.



Tételezzük fel, hogy versenyzőnk sikeresen megállta a helyét az elődöntőben és továbbjutott a középdöntőbe. Itt már hattagú zsüri dönt. A zsüri tagjai a következők: színész, énekes, táncos, zenész, rendező, a televízió képviselője. A különböző művészeti ágak

versenyét külön-külön rendezik meg. A hat zsüritagnak nem egyenlő mértékben döntő a szavazata. Például a versmondás középdöntőjében ahhoz, hogy a versenyző továbbjusson a döntőbe, legalább a következő feltételek valamelyikének kell fennállnia:

1. Mind a négy művészeti ág képviselője a továbbjutásra szavaz.
2. A színész, az énekes és a rendező a továbbjutásra szavaz.
3. A színész és a televízió képviselője a továbbjutásra szavaz.

A hat zsüritag mindegyike pozitív szavazat leadása esetén lenyomja a maga kapcsolóját. A feladat annak az áramkörnek a megtervezése, amelyben a továbbjutást jelző lámpa akkor és csak akkor fog kigyulladni, ha a versmondó továbbjut a döntőbe.

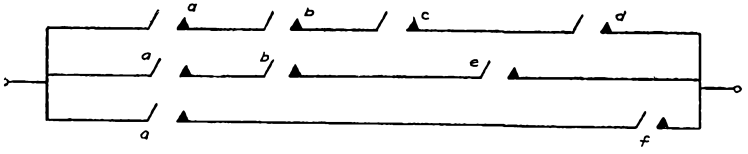
Állapodjunk meg a következő jelölésekben.

A színész a továbbjutásra szavaz $= a$
Az énekes a továbbjutásra szavaz $= b$
A táncos a továbbjutásra szavaz $= c$
A zenész a továbbjutásra szavaz $= d$
A rendező a továbbjutásra szavaz $= e$
A televízió képviselője a továbbjutásra szavaz $= f$

Írjuk fel a továbbjutás feltételeit kifejező összetett ítéletet:

$$(a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge e) \vee (a \wedge f)$$

Tervezzük meg az ennek megfelelő áramkört:



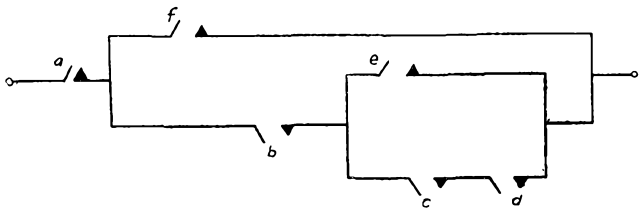
Mint a rajzról látható, kilenc kapcsolóra van szükség. Próbáljuk meg a feladatot kevesebb kapcsolóval megoldani. Látható, hogy a kapcsolónak feltétlenül zárva kell lennie és vagy f-nek, vagy b-nek és ez esetben még e-nek, vagy c-nek és d-nek kell zárva lennie. Milyen nehezen érthető kifejezést kaptunk! Köznyelvi kifejezésben

alig követhető ez az ítélet, és mint látni fogjuk, a kapcsolók „nyelvén" ez az egyszerűbb, a gazdaságosabb, a kevesebb kapcsolót igénylő megoldás.

Az „egyszerűbb" ítélet tehát így írható fel formulában:

$$a \wedge [f \vee \{b \wedge (e \vee (c \wedge d))\}]$$

Tervezzük meg a formulának megfelelő áramkört:



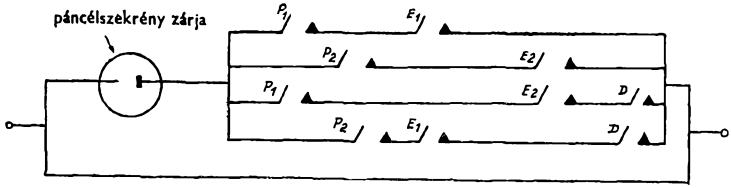
Itt már csak hat kapcsoló szerepel, tehát a formula átalakításával három kapcsolót sikerült megtakarítani.

A következő példánkban egy páncélszekrényt kell elektromos zárral ellátni, mégpedig a páncélszekrényt használó vállalat speciális körülményeinek megfelelően. A vállalat két műszakban dolgozik, tehát két pénztárosa van és mindegyikhez tartozik egy ellenőr is. A páncélszekrényt csak a pénztáros és az ellenőr együtt nyithatja ki, tehát az első pénztáros (P_1) az első ellenőrrel (E_1) vagy a második pénztáros (P_2) a második ellenőrrel (E_2) együtt. Előfordulhat azonban, hogy valamelyik pénztáros vagy ellenőr beteg. Ilyenkor természetesen a pénztárost a másik pénztáros helyettesíti.

Egy pénztáros a nem hozzátartozó ellenőrrel azonban csak a vállalatvezető (D) tudtával és engedélyével nyithatja ki a páncélszekrényt. A feladat tehát olyan zár szerkesztése, amely akkor és csak akkor nyílik ki, amikor a következő feltételek egyike fennáll: A zárat vagy az első pénztáros és az első ellenőr, vagy a második pénztáros és a második ellenőr, vagy az első pénztáros és a második ellenőr és a vállalatvezető, vagy a második pénztáros és az első ellenőr és a vállalatvezető nyithatja ki.

$$(P_1 \wedge E_1) \vee (P_2 \wedge E_2) \vee (P_1 \wedge E_2 \wedge D) \vee (P_2 \wedge E_1 \wedge D)$$

E feladat legegyszerűbb műszaki megoldása, ha a páncélszekrényen öt különböző kulcslyuk van öt különböző kulccsal. A kulcslyukba tartozó kulcs belehelyezése után a zár elektromos úton érzékeli, hogy a kulcs benne van és ezzel zárul egy áramkör, a zár kinyílik (pl. úgy, hogy az áramkör zárásával a zárnyelv a zártokból kihúzódik és a zár kinyílik). Egy-egy zár nyitott állapota azonban még nem jelenti, hogy a páncélszekrény is kinyitható. A kulcslyukak zárjai és a páncélszekrény ajtajának zárja között megfelelő kapcsolatokat kell létesíteni, vagyis műszakilag realizálni kell a $(P_1 \wedge E_1) \vee (P_2 \wedge E_2) \vee (P_1 \wedge E_2 \wedge D) \vee (P_2 \wedge E_1 \wedge D)$ formulát úgy, hogy a páncélszekrény ajtaja akkor és csak akkor nyíljon ki, amikor a fenti ítélet igaz, vagyis ha a diszjunkcióknak megfelelő párhuzamos kapcsolások valamelyikében az áramkör zárva van.

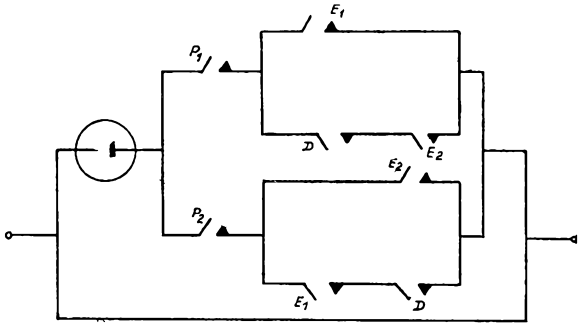


Eszerint az öt alkalmazott (P_1, P_2, E_1, E_2, D) mindegyikéhez két-két kapcsoló tartozik.

Ha azt akarjuk, hogy az áramkör kevesebb kapcsoló alkalmazásával legyen megvalósítható, akkor megpróbálhatjuk eredeti formulánkat más alakra hozni.

$$(P_1 \wedge E_1) \vee (P_2 \wedge E_2) \vee (P_1 \wedge E_2 \wedge D) \vee (P_2 \wedge E_1 \wedge D) =$$
$$= [P_1 \wedge (E_1 \vee (E_2 \wedge D))] \vee [P_2 \wedge (E_2 \vee (E_1 \wedge D))]$$

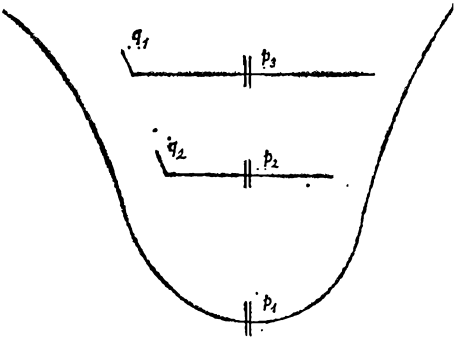
Ebben az esetben a diszjunkció első és harmadik tagjából P_1, valamint a diszjunkció második és negyedik tagjából P_2 kiemelésével (a disztributivitási törvény alapján) olyan formulát kaptunk, amelynek műszaki realizálásához már kevesebb kapcsoló alkalmazása elegendő. Az eredetileg alkalmazott tíz kapcsolót nyolcra tudtuk csökkenteni:



Műszaki feladatok matematikai logika segítségével történő megoldására vegyük a következő példát. Valamely vasúti pályaudvar biztosító berendezését kell megtervezni. A feladat az, hogy zöld lámpával jelezzük, ha a pályaudvarra szerelvény befuthat. Vegyünk egy egészen egyszerű pályaudvart, ahol csak egy irányból érkeznek szerelvények és egy másik, ezzel ellentétes irányba távoznak. A pályaudvarnak mindössze három vágánya és két váltója van.

Jelentse

p_3 = a hármas számú vágányt
p_2 = a kettes számú vágányt
p_1 = az egyes számú vágányt
q_1 = az egyes váltót
q_2 = a kettes váltót.



Mikor jelezhet a zöld lámpa szabadot, vagyis mikor futhat be a pályaudvarra valamely szerelvény? Szóban ezt igen nehéz megfogalmazni, valami ilyen szörny-mondat lesz belőle: „Akkor és csak akkor jelezhet a lámpa szabadot, ha fennáll, hogy amennyiben az egyes váltó szabad és egyenes (vízszintes) állásban van, akkor a hármas peronnak kell szabadnak lennie, vagy ha az egyes váltó szabad és nem áll egyenes állásban (függőleges helyzet), akkor amennyiben a kettes váltó szabad, és egyenes állásban van (függőleges irány), akkor ha az egyes peron szabad, bejöhet a vonat, viszont ha a kettes váltó nem áll egyenes állásban, de szabad, akkor a vonat abban az esetben jöhet be, ha a kettes peron szabad."

Érthetőbb lesz az ítélet, ha formalizáljuk az alábbi jelölést alkalmazva:

A_1 = Az egyes váltó szabad.
A_2 = A kettes váltó szabad.
E_1 = Az egyes váltó egyenesben áll.
E_2 = A kettes váltó egyenesben áll.
P_1 = Az egyes peron szabad.
P_2 = A kettes peron szabad.
P_3 = A hármas peron szabad.
A vonat bejuthat a pályaudvarra, ha

$$((A_1 \wedge E_1) \rightarrow P_3) \vee [(A_1 \wedge \bar{E}_1) \rightarrow \{((A_2 \wedge E_2) \rightarrow P_1) \vee ((A_2 \wedge E_2) \rightarrow P_2)\}]$$

A biztosító berendezés elkészítéséhez arra van szükségünk, hogy ezt a formulát olyan alakra hozzuk, amely a leggazdaságosabb, a legegyszerűbb műszaki megvalósításra ad lehetőséget.

Azt mondottuk, bonyolult formát kaptunk. Pedig itt csak egy igen leegyszerűsített pályaudvarról volt szó. Képzeljük el a Nyugati-pályaudvar biztosító berendezésének működési feltételeit kifejező ítéletet, hogy ne is említsük azt az ítéletet, amely egy űrhajó berendezésének működési feltételeit fogalmazza meg. Az ilyen ítéleteknek megfelelő áramkörök létrehozása napjaink úgyszólván mindennapi gyakorlati feladata. Hogyan képes az emberi elme mindezt megvalósítani? Úgy, hogy segítségül hívja a mai tudomány nagy vívmányát az ún. gondolkodógépeket, amelyek megvalósításához szintén a modern logika felhasználására van szükség.

GYAKORLATOK:

48. Készítsük el annak a kapcsolási rendszernek a tervrajzát, amely jelzi, ha

a) az elődöntőből nem jutott tovább versenyző,
b) a versmondó nem jutott tovább a középdöntőből,
c) a páncélszekrény zárva van.

A következő De-Morgan azonosságokra kell támaszkodnunk:

$$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q} \qquad \overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$$

III. A FOGALOM

A logika fejlődésének új korszaka, a szimbolikus logika megjelenése nemcsak a módszer vonatkozásában jelentett változást, a logikai tanulmányok problematikájának változását is maga után vonta. Egészen a legutóbbi időkig a logikai formalizált nyelvek (logikai kalkulusok) kiépítése és ezeknek a természetes nyelvekhez való viszonyának vizsgálata állt a kutatás előterében. Sőt voltak olyan nézetek (főleg a korai logikai pozitivizmus), amelyek szerint e feladatokkal kimerül a logika területe. Az ilyen koncepcióban megírt logikakönyvek elhanyagolják a logika olyan problémáit, amelyek nem kapcsolódnak szorosan a logikai kalkulusok kérdéseihez. Ilyen sorsra jut a „fogalom" tana is. Az összefoglaló szimbolikus logikakönyvekben a fogalom csak egy-egy kalkulusban, egy-egy oldaláról, mint osztály (az osztályok logikájában), mint predikátum-függvény (a predikátumkalkulusban) szerepel.

„A logika tudományának tárgya" c. fejezetben már szóltunk arról, hogy a logika feladata nem merülhet ki formális logikai apparátusok létrehozásában. A logika számára ezen apparátus csupán eszköz a gondolatformák tanulmányozásához. Olyan eszköz ez, amelynek eredményeit a gondolatformák mindegyikének — így a fogalomnak — az elemzéséhez fel kell használni.

A továbbiakban a hagyományos logika tanításából kiindulva, a modern logika eredményeit figyelembe véve igyekszünk a fogalomelmélet néhány kérdését tárgyalni.[1]

1. FOGALOM ÉS NYELV KAPCSOLATA

1.1. FOGALOM ÉS NYELVI KIFEJEZÉS

A fogalmak nyelvi kifejezési formái szavak vagy szócsoportok. Pl. „béke", „gyümölcs", „áru" szavak — „a Magyar Népköztársaság külpolitikája", „az első évfolyam magyar szakos hallgatói" szócsoportok, fogalmak nyelvi kifejezését szolgálják. Nem minden szó vagy szócsoport fejez ki fogalmat. Ahhoz, hogy megértsük, melyek azok a szavak, szócsoportok, amelyek fogalmak, a nyelvi kifejezések különböző csoportjainak vizsgálatára van szükség.

A nyelvi kifejezések közül azokat, amelyeknek önálló jelentésük van, szemantikai kategóriáknak nevezzük. E kategóriák közé tartoznak először is a mondatok és másodszor olyan kifejezések, amelyek a mondaton belül töltenek be meghatározott szerepet. Ezek között vannak ún. deszkriptív terminusok és logikai terminusok. A logikai terminusok közé tartoznak pl. a már elemzett „és", „vagy", „ha-akkor", „nem" stb. kifejezések.

A deszkriptív terminusok között vannak: 1. azok a szavak, szócsoportok, amelyek individuumokat jelölnek meg. Ezek az egyedi terminusok. Ilyen pl. „Nap", „Newton", „a világ első űrhajósa" stb., 2. ún. predikátorok, amelyek azoknak a viszonyoknak, tulajdonságoknak a jelölői, amelyeknek a dolgokban való meglétét, illetve hiányát ítéletekben állíthatjuk. Predikátor pl. „fém", „tanuló", „munkahely".

Minden predikátor alapján ki lehet választani a tárgyak meghatározott körét, amelybe azok és csak azok a dolgok tartoznak, amelyek rendelkeznek a predikátorban kifejeződő tulajdonsággal, viszonnyal. A dolgoknak ezt a körét a predikátor igazsághalmazának fogjuk nevezni. Pl. a „munkahely" predikátor igazsághalmazába beletartozik a „Budapesti Műszaki Egyetem Pedagógia Tanszéke", a „Shell művek", a „»Tavasz« mezőgazdasági termelőszövetkezet" stb.

A logika történetében meglehetősen elhanyagolták az egyedeket megjelölő kifejezések és a predikátorok logikai vonatkozásainak vizsgálatát. Mindkét típusú terminust logikai szempontból foga-

lomnak tekintették és nem ismerték fel a megismerésben betöltött különböző funkciójukat. A predikátorok a mondatban nem csak állítmány, hanem alany szerepét is betölthetik. Például „Minden fém vezeti az elektromosságot" mondatban a fém predikátor alany szerepét tölti be. Mint alany nem egy tulajdonság képviselője, hanem megjelölője a fém predikátor igazsághalmazába beletartozó valamely dolognak. Világos lesz ez, ha meggondoljuk, hogy az elektromos vezetés nem a fém *tulajdonságának* a sajátossága, hanem az egyes fémeknek, tehát azoknak a dolgoknak, amelyek a fém predikátor igazsághalmazába tartoznak. *A predikátor ebben a szerepében már nem állandó terminus, hanem változó*, mivel nem egy meghatározott egyed, hanem a fenti esetben pl. a fém predikátum igazsághalmazából egy valamely, de bármelyik egyed megjelölését szolgálja.

A fogalom logikai formája azoknak a nyelvi kifejezéseknek, amelyeknek a mondatban az a szerepük, hogy dolgokat (tárgyakat, jelenségeket) jelöljenek meg. De nem minden terminus, amely dolgok megjelölésére szolgál, fogalom. A fogalom sajátossága éppen az, hogy ez a megjelölés tulajdonság, viszony kiemelésével történik. *A predikátor abban a szerepében, ahol változó terminusként szerepel, a dolgokat éppen tulajdonságaik, viszonyaik alapján jelöli meg, tehát mint ilyen fogalom nyelvi kifejezési formája.*

2. A FOGALOM LOGIKAI SZERKEZETE

2.1. A FOGALOM TARTALMA ÉS TERJEDELME

A fogalom olyan gondolat, amely dolgok ismertetőjegyeik alapján történő általánosításának eredménye. Azok a „dolgok", amelyek a fogalomalkotás alapját képezik, nem feltétlenül materiális tárgyak, hanem lehetnek viszonyok, tulajdonságok stb., vagyis általánosan mindaz, ami széles értelemben véve a gondolkodás objektuma lehet.

Mit nevezünk ismertetőjegynek?

Ismertetőjegy lehet az, ami tárgyak jellemzésére alkalmas. Azok a tulajdonságok, viszonyok, amelyekben a tárgyak hasonlítanak és különböznek egymástól. Széles értelemben ismertetőjegy az, amit értelmes kijelentésben állítani lehet valamely dologról. Ismertetőjegy az, amit predikátumként állítani lehet valamely alanyról.

Maga a tárgy meghatározott minőségű, meghatározott térbeli, időbeli viszonylatokban áll más tárgyakkal. A tárgy ezen objektív sajátosságai, viszonyai válnak ismertetőjeggyé a megismerés folyamatában. Például valamely tárgy objektív sajátossága, hogy 2 méter magas, kemény, gömb alakú stb. E tulajdonságok az ismertetőjegyei, ezek teszik ugyanis lehetségessé, hogy elkülönítsük más dolgoktól, amelyek más sajátosságokkal rendelkeznek és azonosítsuk olyan dolgokkal, amelyeknek vele azonos tulajdonságai vannak, egyszóval ezek teszik lehetővé, hogy fogalmat alkossunk róla.

Ha pl. az „áru" fogalmát alkotjuk meg, adott dolgoknak azt a közös sajátosságát emeljük ki, hogy csereértékük van, hogy piacra kerülve eladhatók. Ezek a tulajdonságok az „áru" *lényeges* ismertetőjegyei.

Minden ismertetőjegy csak meghatározott vonatkozásban lényeges ismertetőjegye az objektumnak. Azoknak a konkrét tárgyaknak, amelyek áruk, más vonatkozásban pl. mint *vas* tárgyaknak, már más lényeges ismertetőjegyei lesznek. Megint más lesz a lényeges, ha erről a vas tárgyról mint „kapu"-ról alkotnak fogalmat. Ebben az esetben azokat az ismertetőjegyeket kell kiemelni, amelyek minden „kapu" lényeges ismertetőjegyei.

A dialektikus materializmus nem ismer el a dolgok „végső alapját" képező lényegeket. A dolog lényege az a határ, amíg az adott megismerési fokon tudásunk eljutott. Lenin szavaival: „nemcsak a jelenségek múlékonyak, mozgékonyak, folyékonyak, csupán feltételes határok által elválasztottak, hanem a dolgok *lényegei* úgyszintén."[2]

A dolgok lényegének megismerése a kevésbé mély lényegtől halad a mind mélyebb lényeg feltárásához, és ennek megfelelően az egyik fogalomtól a másik fogalomhoz, amely teljesebben tükrözi vissza az objektumot. *A megismerés egy adott fokán a dologról való*

tudásunk meghatározott ismertetőjegyek összességéből áll, ezek alkotják a dologról alkotott fogalom tartalmát. A megismerés előrehaladása az ismert sajátosságok (a fogalom tartalma) alapján új sajátosságok feltárása felé halad.

A fogalom tartalma kifejezést szűkebb és tágabb értelemben is használják. Tágabb értelemben valamely fogalom tartalmába beletartoznak mindazok az ismertetőjegyek, amelyek sajátjai a fogalomban általánosított összes tárgynak. Például a négyzet fogalom tartalmába tartozó ismertetőjegyek: geometriai alakzat, síkidom, zárt, négy egyenes által határolt, párhuzamos oldalakkal rendelkező idom stb. Szűkebb értelemben a fogalom tartalmát azok az ismertetőjegyek képezik, amelyek szükségesek és együttesen elegendők ahhoz, hogy a gondolat tárgyát képező dolgok elhatárolhatók legyenek minden mástól. A fogalomnak ez a szűkebb tartalma, a tárgyak gondolati általánosításának kezdeti foka, amely lehetővé teszi a tudás elmélyülését, a fogalom tartalmának tudásrendszerré való szélesedését.

A fogalom szűkebb tartalma tehát nem foglalja magába a tárgy összes lényeges ismertetőjegyeit, még egy adott vonatkozásban sem. Például a háromszög fogalmának tartalmát alkotó ismertetőjegyek: „zárt mértani síkidom", „három egyenes oldal által határolt idom". Természetesen a háromszögnek ennél jóval több lényeges ismertetőjegye van. (Szögeinek összege 180°, szögfelezői egy pontban metszik egymást stb.) *A fogalomalkotás kiindulópont lehet a tárgy még nem ismert sajátosságainak feltárásához*, de nem minden újonnan feltárt lényeges ismertetőjegy változtatja meg a fogalom tartalmát. Egy ideig az adott, meghatározott tartalmú fogalom szolgáltatja azt a keretet, amely lehetővé teszi az új ismeretek szerzését. A fogalmak fejlődésére érvényes a dialektika törvénye: a rejtett mennyiségi változások nyílt, gyökeres minőségi változásokba mennek át. Egy meghatározott ismeret-fejlődési szakasz után az új ismertetőjegyek mennyiségi felhalmozódása szétfeszíti a régi fogalom tartalmának kereteit és új, — de megint csak meghatározott tartalmú fogalom keletkezését teszi szükségessé.

Ilyen fejlődési folyamaton ment végig pl. a „tífusz" fogalma. Régebben minden olyan betegség a „tífusz" fogalma alá tartozott, amelynek megvolt az az ismertetőjegye, hogy magas vagy hosszan

tartó lázzal járt és a láz az öntudatot elhomályosította. (A fogalom ezen tartalmára utal az elnevezés is: „Typhosz" görögül „köd"-öt jelent, a magas láz következtében az elme mintegy „ködbe borul".) Ma azonban a tífusz fogalma már lényegesen megváltozott, csak egy bizonyos bacilus (az ún. Eberth—Gaffley-féle bacilus) által okozott megbetegedés tartozik e fogalomba. Nyilvánvaló, hogy a tífusz régi fogalma — a magas vagy hosszan tartó lázzal járó, az öntudatot elhomályosító betegségek csoportjának kiválasztása — segítségünkre volt e betegségek ismertetőjegyeinek feltárásában, többek között a tífusz kórokozójának felfedezésében. A tífusz fogalma tehát változáson ment keresztül, de mindkét változatában meghatározott tartalma volt. Ezért beszélhetünk a „tífusz" régi és új fogalmáról, de meg kell állapítani azt is, hogy az új fogalom a régi fogalomból fejlődött ki. Hasonló fejlődési folyamatok mennek végbe jelenleg is az orvostudományban. Például rosszindulatú daganatos megbetegedéseket egy közös csoportba sorolva megalkották a „rákbetegség" fogalmát. Ez azonban korántsem jelenti azt, hogy a rákbetegség összes lényeges ismertetőjegyét már feltártuk. A rákbetegségről szerzett új ismeretek egy ideig nem változtatják meg a „rákbetegség" fogalmát. A tudomány fejlődésével azonban bekövetkezhet egy olyan szakasz, amikor az újonnan feltárt lényeges ismertetőjegyek szétfeszítik a régi fogalom kereteit, új fogalmat kell létrehozni. Lehet, hogy az újabb felfedezések olyan új ismertetőjegyeit tárják fel a rákbetegségnek, amely ellentétben van a rákbetegség jelenlegi fogalmának tartalmát alkotó valamely ismertetőjeggyel. Ez esetben a rákbetegség fogalma módosul. Az is elképzelhető — és erre az orvostudományban igen sok jel van —, hogy az, amit ma a „rákbetegség" fogalmában egyesítünk, valójában különböző okokból előálló, különböző típusú betegségek összessége. Így szükségessé válhat a „rákbetegség" fogalmának több új fogalommal való felváltása. Lehet, hogy ennek ellenére megmarad e betegségek közös fogalma is. Akkor ennek tartalma megváltozik és többfajta betegség összefoglaló fogalmává válik.

A fogalmak fejlődése, új fogalmak kialakulása nemcsak ismereteink fejlődésének következménye. Maga *a megismerendő tárgy, az objektív valóság állandó fejlődésben, változásban van*, amely szintén szükségessé teszi új fogalmak keletkezését. Természetesen, a tárgy

nem minden változásával változnak fogalmaink. Ha egy káposztamag kicsírázik, növénnyé fejlődik, ez az adott dolog fejlődését tekintve nagy változás, de természetesen nem jelent változást fogalmainkban. Az adott dolog egyik esetben a „káposztamag", másik esetben a „káposztanövény" fogalma alá tartozik, de ez a fogalmak tartalmán nem idéz elő változást. Ha viszont valamely kereszteződés, vagy egyéb ok folytán olyan új növény keletkezik, melynek sajátosságai más előző növényeknél nem voltak meg és ezek gazdasági vagy biológiai, vagy egyéb szempontból fontosak — új fogalom megalkotása válik szükségessé. Így alakult ki pl. a „karalábé", „karfiol" fogalma is. A káposzták egy részének föld feletti szára generációk fejlődésén keresztül fokozatosan megvastagodott, elhúsosodott. Ez az alma-nagyságtól 3—4 kg-ig megnövő vastag szár kitűnő, minőségileg új táplálék az addig termesztett káposztához viszonyítva. Más káposztáknál viszont generációk fejlődése folyamán a virágzat torzult el. A levelek közül húsos elkorcsosult szárak emelkedtek ki, amelyek végén a satnyán maradt virágok összenőve húsos csomókat alkottak. Az elhúsosodott virágokból újfajta ízletes táplálékot lehetett készíteni. Az egyes káposzta-félékben bekövetkezett változások szükségessé tették, hogy a „káposzta" fogalom mellett a káposztákkal rokon új növényekre külön fogalmakat alkossunk, és ezen új fogalmaknak megfelelő új nyelvi kifejezéseket is létrehozzunk. Így született meg a „karalábé" és a „karfiol" elnevezés. [Érdekesen utal e fogalmak kialakulására a karfiol orosz („cvetnaja kapuszta"), és magyar („virágkel") elnevezése. Itt a nyelvi kifejezés megőrzi azt a rokonságot, ami a „karfiol", „kelkáposzta" és a „káposzta" között fennáll. Rámutat arra, hogy a „káposzta" fogalom differenciálódása útján alakultak e fogalmak.]

Valamely új, eddig még elő nem fordult dolog létrejötte és az ennek alapján keletkezett új fogalom hatással lehet a már előzőleg meglevő fogalmainkra is. Például az 1905-ös orosz forradalomig csak olyan polgári forradalom létezett, amelyben a vezető a burzsoázia valamely csoportja volt. Ennek alapján a „polgári forradalom" lényeges ismertetőjegyeinek pl. a következőket tartották: „a feudalizmusból a kapitalizmusba való átmenet formája", „olyan forradalom, amelynek vezetője a burzsoázia" stb. De az 1905-ös

forradalom megmutatta, hogy a burzsoázia vezető szerepe nem elengedhetetlen ismertetőjegye a polgári forradalomnak, sőt meghatározott történelmi körülmények között a burzsoázia nem képes a vezetésre, és így a forradalom vezetését a parasztsággal szövetségben a munkásosztálynak kell vállalnia. Így az 1905-ös forradalommal a polgári forradalom új fajtája, és ennek alapján két új fogalom keletkezett: „polgári forradalom, amelynek vezetőereje a burzsoázia", „polgári forradalom, amelynek vezetőereje a proletariátus, szövetségben a parasztsággal". De a két új fogalom mellett megváltozott a „polgári forradalom" fogalma is. Ennek már nem lényeges ismertetőjegye, hogy ki a vezetőereje a forradalomnak.

A fogalom terjedelmét a fogalomban általánosított dolgok osztálya alkotja. Az „osztály"[3] dolgok meghatározott egysége, pl. a vas tárgyak, a hangszerek, a páros számok egysége egy-egy osztályt alkot.

A fogalom terjedelmét képező osztály *elemei* a fogalom tartalmát alkotó ismertetőjegyek birtokosai. Pl. a „paralelogramma" fogalom terjedelmét a paralelogrammák osztálya alkotja. Ezen osztály elemei az egyes paralelogrammák. A paralelogrammák egyes fajtái a paralelogrammák osztályának *rész osztályai* (pl. derékszögű paralelogrammák, nem-derékszögű paralelogrammák).

A fogalom terjedelmét képező osztály elemeinek száma szempontjából megkülönböztethetünk olyan fogalmat, amelynek a terjedelme üres osztály (egy eleme sincs, pl. holdlakók osztálya), továbbá olyant, amelynek a terjedelmébe egy elem tartozik (pl. Földünk Holdja), és olyant, amely véges (pl. népi demokráciák osztálya), illetve, amely végtelen sok elemet tartalmaz (pl. páros számok osztálya). Azt az osztályt, amelynek az adott vizsgálódásban előforduló összes osztály a rész osztálya, kiinduló osztálynak, Univerzumnak nevezzük. Jele: U.

A fogalom terjedelme nem attól függ, mely dolgokat ismerünk a fogalom terjedelméből. A terjedelmet az összes lehetséges tárgy alkotja. Például az „ember" fogalom terjedelmébe a múlt, jelen és a jövő összes emberei beletartoznak, akik az „ember" ismertetőjegyeivel rendelkeznek. A fogalom terjedelmébe tartoznak mindazok az elemek, amelyekről állíthatók a fogalom tartalmát képező ismertetőjegyek.

2.2. AZ OSZTÁLYOKKAL VÉGZETT MŰVELETEK

A fogalmak terjedelmi sajátosságainak megértéséhez meg kell ismerkednünk az osztályokkal végzett műveletekkel.

Az osztályokkal végzett logikai műveletek olyan műveletek, amelyek eredményeként ismét osztályokhoz jutunk.

Azt a tényt, hogy valamely A osztály egy másik B osztálynak részosztálya, a következő módon jelöljük: $A \subset B$

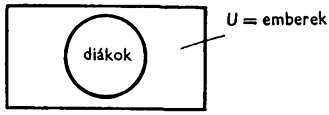
Az osztály és a részosztály közötti viszonyt *bennfoglalás* viszonyának nevezzük. Valamely A osztály bennfoglaltatik a B osztályban, ha A minden eleme B osztálynak is eleme.

Az a tény, hogy A minden eleme B osztálynak is eleme, nem zárja ki annak lehetőségét, hogy B minden eleme A osztálynak is eleme legyen. Ha ez a tény is fenn áll, akkor A és B osztályok közötti *azonossági viszonyról* beszélünk. Két osztály között azonossági viszony áll fenn, ha A minden eleme B-nek is eleme, és B minden eleme A-nak is eleme. Az azonossági viszony jele: $A = B$

$A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subset B$ és $B \subset A$.

Ha A és B osztály között azonossági viszony áll fenn, akkor A osztály B osztálynak *nem valódi részosztálya*, és B osztály A osztálynak ugyancsak *nem valódi részosztálya*.

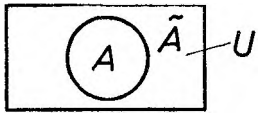
Az osztályműveleteket a továbbiakban ún. Venn-diagramokkal fogjuk ábrázolni. Téglalappal jelöljük az Univerzumot, a téglalapon belül körrel az Univerzum valamely részosztályát. Legyen pl. a kiinduló osztály az emberek osztálya, a részosztály a diákok osztálya:



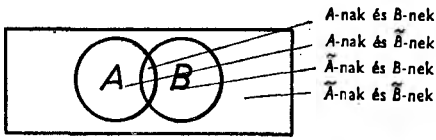
A diákok osztályának a kijelölésével az Univerzum elemeit két részre osztottuk. Azok, akik *nem-diákok* a körön kívül helyezkednek el. Ezek egy újabb osztályt képeznek, a *nem*-diákok osztályát. Ez az osztály a diákok osztályának kiegészítő osztálya.

Általában ha A osztály U-nak részosztálya, akkor ha azon dolgok osztályát képezzük, amelyek nem tartoznak A osztályba, a

nem-A osztályt, az A *kiegészítő osztályát* kapjuk. A kiegészítő osztály jele: $\tilde{A}$



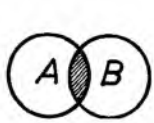
Ha két részosztályt veszünk fel, ez már négy részre osztja az Univerzumot. Ha a két részosztály A és B, az Univerzum elemei felosztható olyanokra, amelyek elemei:



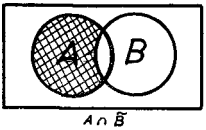
Annak a műveletnek az eredményét, amely művelettel két vagy több osztály közös elemeinek osztályát hozzuk létre, *osztályok metszetének* nevezzük.

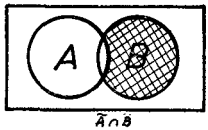
A és B metszetének minden eleme eleme A osztálynak is és B osztálynak is. Jele: $A \cap B$

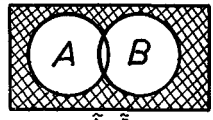
Ha az A a diákok, B a sportolók osztálya, akkor $A \cap B$ a diáksportolók osztálya. A diáksportolóknak az alábbi ábrán besötétített rész felel meg:



Természetesen képezhetjük A és $\tilde{B}$ osztályok metszetét, valamint $\tilde{A}$ és B osztályok, továbbá $\tilde{A}$ és $\tilde{B}$ osztályok metszetét is:





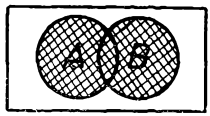


Az $A \cap \tilde{B}$ osztály nem más, mint A azon elemeinek osztálya, amelyek nem elemei B-nek, vagyis az A osztálynak B osztálytól való *különbsége* $\tilde{A} \cap B$ osztály B osztálynak A osztálytól való különb-

sége. A osztálynak B osztálytól való különbségének szokásos jelölése: $A - B$

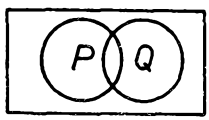
B osztálynak A osztálytól való különbségét $B - A$ jellel jelöljük.

Két vagy több *osztály egyesítésével* új osztály jön létre. A diákok osztálya egyesítve a sportolók osztályával a „diákok vagy sportolók" osztályát adja. Ezen osztály minden eleme vagy diák vagy sportoló, vagy diák és nem sportoló, vagy nem diák és sportoló. A, B egyesítésének jele: $A \cup B$.



Nem nehéz észrevenni az analógiát az osztályok és a kijelentések, az osztályműveletek és a kijelentéslogika műveletei között. Nézzük meg ezt közelebbről.

Induljunk ki abból, hogy p, q, r... ítéleteket jelölnek és, hogy U az ezen ítéletek igazságérték-lehetőségeinek osztálya.
P, Q, R... osztályok a p, q, r... ítéletek igazságosztályai.

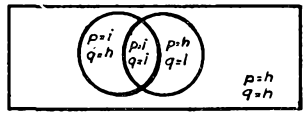


U = ítéletek igazságosztálya.
P = p ítélet igazságosztálya.
Q = q ítélet igazságosztálya.

Ha p, q... stb. ítéletek igazságának megfeleltethetők osztályok, akkor világos, hogy $p \wedge q$, $p \vee q$ ítélet igazságának szintén megfeleltethetők osztályok. Tudjuk, hogy $p \vee q$ akkor igaz, ha igaz p, vagy igaz q (vagy mindkettő). Ebből következik, hogy $p \vee q$ igazságértékének megfeleltethető a $P \cup Q$ osztály. Ugyanígy a $p \wedge q$ ítélet igazságértének a $P \cap Q$ osztály feleltethető meg. Az osztályműveletek és az ítéletkalkulusbeli műveletek közötti megfelelőség a nyelvi formában is kifejeződik. Osztályok egyesíté-

sét pl. a magyar nyelv ugyanúgy „vagy" szóval fejezi ki, mint az ítéletek diszjunkcióját. A konjunkció és osztályok metszetének magyar nyelvi kifejezése legtöbbször egyaránt „és" szóval történik. A kiegészítő osztály nyelvi kifejezésénél a „nem" szócskát használjuk, és $\bar{P}$ halmaz megfelel $\bar{p}$ ítélet igazsághalmazának.

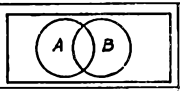
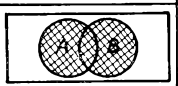
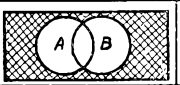
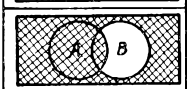
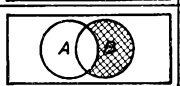
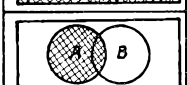
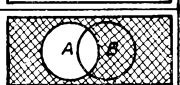
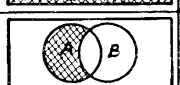
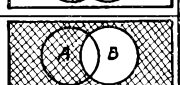
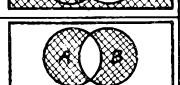
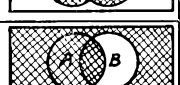
Ábrázoljuk most már két ítélet lehetséges igazságkapcsolatait a nekik megfelelő osztályokkal:



Az igazságérték osztályok és a kijelentések közötti megfelelés lehetővé teszi, hogy a kijelentéslogika bármely műveletét, minden törvényét lefordítsuk osztályok közötti törvényekre. Eddig csak azokkal az osztályműveletekkel ismerkedtünk meg, amelyek a negáció, a diszjunkció és a konjunkció megfelelői, de tudjuk, hogy bármely művelet meghatározására elegendő ezek ismerete. Például $p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$. Így $p \leftrightarrow q$ igazságosztálya: $(P \cap Q) \cup (\bar{P} \cap \bar{Q})$. Ezen osztálynak megfelel a besötétített rész az alábbi rajzon:

Ezek után visszatérve az osztályokról a fogalmakhoz, megállapíthatjuk a következőket: Egy kiinduló fogalmon belül két fogalom és ezek negatív fogalmainak felhasználásával tizenhat terjedelmileg különböző új fogalmat alkothatunk. Az „n" számú fogalomból alkotható fogalmak száma: 2^{2^n}.

A következő oldalon levő táblázatban megtalálható a két halmazból képezhető 16 halmaz ábrázolása Venn-körökkel, az ezeknek megfelelő ítéletek jelölése és egy-egy példa a megfelelő halmazra.

A halmaz ábrázolása Venn körökkel	Halmaz jele	Példa	megf. ítélet	A halmaz ábrázolása Venn körökkel	Halmaz jele	Példa	megf. ítélet
	U	emberek	$\uparrow$		$\upsilon=0$	diákok és nem diákok vagy emberek és nem emberek	$\downarrow$
	$A \cup B$	diákok vagy sportolók	$p \vee q$		$\tilde{A} \wedge \tilde{B}$	emberek akik nem sportolók és nem diákok	$\overline{p \vee q}$
	$\tilde{B} \cup A$	emberek kivéve a nem-diák sportolókat	$q \rightarrow p$		$B \wedge \tilde{A}$	nem diák sportolók	$\overline{q \rightarrow p}$
	A	sportoló diákok vagy nem-sportoló diákok	p		$\tilde{A}$	nem diákok	$\bar{p}$
	$\tilde{A} \cup B$	emberek, kivéve a nem-sportoló diákokat	$p \rightarrow q$		$A \wedge \tilde{B}$	nem -sportoló diákok	$\overline{p \rightarrow q}$
	B	diáksportolók vagy nem diáksportolók	q		$\tilde{B}$	nem-sportolók	$\bar{q}$
	$(A \wedge B) \vee (\tilde{A} \wedge \tilde{B})$	diáksportolók vagy olyan emberek, akik nem diákok és nem sportolók	$p \leftrightarrow q$		$(A \wedge \tilde{B}) \cup (B \wedge \tilde{A})$	nem sportoló diákok vagy nem diák sportolók	$p \nabla q$
	$A \wedge B$	diák sportolók	$p \wedge q$		$\tilde{A} \cup \tilde{B}$	emberek, kivéve a diáksportolókat	$p \mid q$

GYAKORLATOK:

1. Csoportosítsuk elemeik száma alapján (üres, egyelemű, véges elemű, végtelen elemű) az alábbi osztályokat:
   ember
   világegyetem
   mennyország
   a „Korunk hőse" című könyv szerzője.

2. Képezzünk részosztályokat a „filozófus" kiinduló osztályhoz.

3. Ha a kiinduló osztály a számok osztálya és az A osztály a páros számok osztálya, melyik osztály az $\tilde{A}$ osztály? Ha B osztály az egész számok osztálya, mit jelent $A \cap B$, $A \cup \tilde{B}$? Ábrázoljuk Venn-diagrammal ezeket az osztályokat.

2.3. ÖSSZETETT FOGALMAK KÉPZÉSE

Az osztályokról már tudjuk, hogy azok egy-egy fogalom terjedelmét alkothatják. Így természetesen osztályokból képzett osztályok is alkothatják valamely fogalom terjedelmét. Az ilyen fogalmakat *összetett fogalmaknak* fogjuk nevezni. Így pl. a „nullára vagy ötre végződő szám" fogalma összetett fogalom szemben az „ötre végződő szám" fogalmával és a „nullára végződő szám" fogalmával. A „sportoló diák" fogalom összetett fogalom a „sportoló" és a „diák" fogalmához viszonyítva.

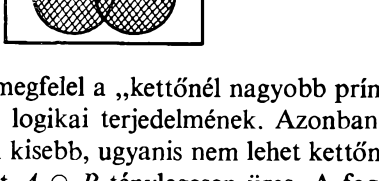
A hagyományos logikai felfogás egyik még ma is elevenen élő nézete, hogy a fogalmak gondolkodásunk tovább nem bontható alapegységei. A fogalmak fejlődését elemezve rendszerint csak arra a mozgásra mutatnak rá, amely során a fogalmak ítéletekké, az ítéletek következtetésekké fejlődnek és a következtetések újabb fogalmak létrejöttét eredményezik. Valójában ez a dialektikus mozgásnak csak egyik oldala. A modern logika eredményei azt bizonyítják, hogy a fogalmaknak nincsenek végső, tovább már nem bontható egységei. Továbbá a fogalmakkal nemcsak ítéletek, kö-

vetkeztetések, hanem fogalmak, ún. összetett fogalmak is létrehozhatók.

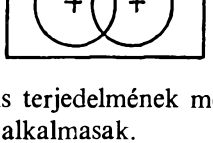
Az összetett fogalom alkotórészeit képező fogalmak maguk is lehetnek összetett fogalmak. Ezt a fenti példák is mutatják. Az „ötre végződő szám", a „nullára végződő szám" maga is tekinthető összetett fogalomnak, amely felbontható alkotórészeire.

Néhány megjegyzést kell tennünk az összetett fogalmak terjedelmével kapcsolatban:

Az osztályokból képzett osztályok a fogalmak *logikai* terjedelmét adják. Ettől a logikai terjedelemtől meg kell különböztetni a fogalom reális (tényleges) terjedelmét, ami gyakran nem esik egybe, kisebb a fogalom logikai terjedelménél. Induljunk ki pl. a „kettőnél nagyobb prímszámok" és a „páros számok" osztályából. E két osztály egyesítéséből kapjuk a „kettőnél nagyobb prímszámok vagy páros számok" osztályát. Ezen osztályt az alábbi besötétített résszel lehet ábrázolni:



A besötétített rész megfelel a „kettőnél nagyobb prímszám vagy páros szám" fogalom logikai terjedelmének. Azonban e fogalom reális terjedelme ennél kisebb, ugyanis nem lehet kettőnél nagyobb páros prímszám, tehát $A \cap B$ ténylegesen üres. A fogalom reális terjedelmét csak az alábbi rajzon a kereszttel jelölt részek képezik:



Egy fogalom reális terjedelmének megállapításához az osztálylogika eszközei nem alkalmasak.

Ha egy fogalom (vagy valamely az őt alkotó fogalmak közül) *logikailag üres*, akkor ez a tény kimutatható az osztálylogika eszközeivel. Például „páros szám, amely prímszám és nem-prímszám"

fogalom terjedelme logikailag üres, mivel osztálylogikai eszközökkel kimutatható, hogy e három osztálynak „páros számok", „prímszámok" és „nem-prímszámok" nem lehet közös eleme.

Ha egy fogalom logikailag üres, reális terjedelme is feltétlenül üres. De ha egy fogalom logikailag nem üres, tényleges terjedelmének megállapítására — pontosabban annak megállapítására, hogy logikai terjedelmén belül vannak-e üres részosztályok — el kell hagyni az osztálylogika területét és általában a logika területét, és magához az adott valóságterülethez kell fordulni felvilágosításért.

2.4. AZ ABSZTRAKT TÁRGYAKRÓL

A fogalmakat, mint a *dolgok* ismertetőjegyeik alapján történő általánosításának eredményeit határoztuk meg. De mit kell értenünk *dolgokon*, amelyek a fogalomalkotás alapjait képezik? A dolgok, amelyek fogalmainkban tükröződnek, nemcsak térben és időben kiterjedt tárgyak. A fogalomalkotás alapját ún. absztrakt tárgyak vagy absztrakt objektumok is alkothatják. Ilyen absztrakt objektum pl. a „tulajdonság", a „szám", az „osztály", az „ítélet" stb.

Az absztrakt tárgyak létezésével kapcsolatban a filozófia és a logika történetében két szélsőséges nézet alakult ki, nevezetesen a realizmus és a nominalizmus. Ez a két irányzat új életre kelt a XX. században a matematika és a logika filozófiájában logicizmus és formalizmus néven. A *realizmus* a platóni doktrínából kiindulva azt feltételezi, hogy az absztrakt objektumok vagy absztrakt entitások a tudattól függetlenül, önállóan léteznek. Ezeket nem a tudat kreálja, a tudat csak feltárhatja. A mai *logicista* nézetek szintén elismerik absztrakt tárgyak létezését. A számok, az osztályok stb. szerintük ezekről az absztrakt objektumokról referálnak.

A *nominalizmus* szerint a megismerés objektumai csak konkrét tárgyak lehetnek, csak az, ami térben és időben kiterjedve létezik. Az absztrakt tárgyak fikciók, hiposztazálások (a konkrét tárgyak egyes oldalainak önálló tárgyként való feltételezései).

Kotarbinski, aki a nominalizmus egyik válfajának, a „konkretizmusnak" eklatáns képviselője, a következő példával illusztrálja

felfogását: Amikor mi azt mondjuk, hogy a „kerekség" hozzátartozik a gömbhöz, akkor csak annyit akarunk mondani, hogy a „gömb kerek". Ez nem egy tulajdonság megnevezése, hanem a gömb megnevezése, ami meghatározott dolog és nem tulajdonság. „Ha mindez igaz, akkor teljes joggal azt lehet mondani, hogy tulajdonság lényegében véve nem létezik, és mikor mi a tulajdonságokról beszélünk, akkor valójában arról beszélünk, hogy a tárgyak azok, amelyek éppen ilyenek."[4]

A nominalizmus modern válfaja a *formalizmus* is. A formalizmus a matematikát és a logikát fizikai objektumokkal nem reprezentálható formális jelrendszernek tekinti. A formális jelrendszerek jelek és rájuk vonatkozó mechanikus eljárási utasítások, „játékszabályok" összességei.

Minden materialista egyetért abban, hogy a tulajdonságok, viszonyok, osztályok nem léteznek a valóságban *mint önálló tárgyak*. De léteznek ezek, mint tárgyak jellemzői, mint kapcsolatai más tárgyakkal.

„Kapcsolat", „viszony" stb. ezek természetesen szintén absztrakciók, de absztrakció nélkül nem lehetséges megismerés, minden konkrétat absztrakciókon keresztül ismerünk meg. Az absztrakt tárgyak megalkotásában a tudat — a fogalmakban való tükrözés — aktivitása jelentkezik. A tudat absztrakt objektumai nem közvetlenül, nem egészében a valóság leképezései, hanem az egész feldarabolásának, általánosításának, a sokféleség egységbefoglalásának eredményei.

Külön kell néhány szót szólnunk az „osztályok" létezéséről, amelyeket szintén az absztrakt objektumokhoz sorolhatunk.

Az „osztály" nem önálló tárgya az objektív valóságnak. Nem is olyan fajta egység, mint pl. egy múzeum, vagy egy egyetem, vagy egy kőrakás, amely szintén különböző dolgokból tevődik össze. A kőrakás részei kövek, a múzeumnak részei az egyes kiállítási tárgyak, maga az épület stb. Az osztálynak elemei vannak, amelyeket önálló dolgokként gondolunk el, önálló hordozóiként az osztály más elemeivel közös sajátosságoknak. (A kőrakás egyes köveinek nincs meg a „kőrakás" sajátossága, nem is a *kövek* az elemei a „kőrakás" osztálynak. A „kőrakás" osztály elemei mind kőrakások.)[5]

Amikor fogalmat alkotunk, a fogalom terjedelmeként osztályt képezünk. De a fogalom objektuma nem a fogalom terjedelmét alkotó osztály *mint egész*, hanem az osztály egyes elemei. „A gömb kerek" állítjuk, de a „kerek" tulajdonság az egyes gömbök, a „gömb" osztály elemeinek tulajdonsága és nem a *gömb osztálynak* a sajátossága. A „gömb" fogalomban a gondolat tárgya nem a gömbök osztálya, hanem ennek eleme, vagyis (x) a gömbök osztályából. A fogalom terjedelmét képező osztály létezése egyes elemei létezésében valósul meg.

Könnyen belátható ez addig, amíg csak olyan osztályokat tartunk szem előtt, amelyeknek elemei térben és időben kiterjedt dolgok. A probléma nehezét az okozza, hogy gondolatunk tárgyai nemcsak materiális tárgyak lehetnek. Gondolatunk tárgya lehet az osztály is, megalkothatjuk az „osztály" fogalmát, vagyis képezhetünk olyan fogalmat, amelynek terjedelmébe az osztályok tartoznak, elemei osztályok. Itt új vonatkozásban merül fel az osztály létezésének kérdése: létezik-e az, ami az „osztály" fogalom eleme? Ha erre a kérdésre azt a választ adjuk, hogy az „osztály" létezik elemeiben, de mint egész tudati absztrakció, akkor ellentmondásba kerültünk, mert hiszen „az osztály" fogalom terjedelme maga is egy osztályt alkot és így ő is beletartozik az „osztály" fogalom terjedelmébe. Tehát létezik, holott az előbb azt állítottuk róla, hogy csak elemeiben létezik.

E kérdés alaposabb megértéséhez a predikábilis és az impredikábilis fogalmak csoportjával kell megismerkednünk.

2.5. PREDIKÁBILIS ÉS IMPREDIKÁBILIS FOGALMAK

Azt a tényt, hogy a fogalmak a valóság dolgait tükrözik vissza, nem szabad úgy értelmeznünk, mintha fogalom és valóság két egymással szemben fekvő síkként helyezkedne el, ahol az egyik sík a másik tükörképét nyújtja. A fogalmi visszatükrözés egymásra bonyolult összetételben ráépülő szintek összessége. Az emberi megismerés ugyanis nemcsak a térben és időben kiterjedt tárgyakról, dolgokról, ezek sajátosságairól képes fogalmat alkotni. Már

volt szó arról, hogy a logikában a *dolog*, a tárgy fogalmát jóval szélesebben értelmezzük a köznapi nyelvhasználatnál. Képesek vagyunk fogalmat alkotni magukról a fogalmainkról is, ezek különböző sajátosságait kiemelve. Az ilyen fogalom „tárgya", amely benne visszatükröződik: fogalom. Például tárgyak meghatározott tulajdonságai alapján megalkothatjuk a „zöld színű tárgy" fogalmát, de fogalmat alkothatunk, lehet gondolkodásunk tárgya a „zöld színű tárgy fogalma" is. E fogalom objektumai már nem a zöld színű tárgyak, nem ezek tartoznak terjedelmébe, hanem terjedelmét fogalom alkotja. A „zöld színű tárgy" fogalmát alkotó tárgyak egyik közös ismertetőjegye, hogy zöld színük van, de a „zöld színű tárgy fogalma" fogalomnak már nem ismertetőjegye a zöld szín, ennek a fogalomnak az ismertetőjegye, hogy színtelen dolog.

Az olyan fogalmat, ahol a fogalom fogalmának nem ismertetőjegye az a sajátosság, amely sajátosság a fogalom tartalmát alkotja, *impredikábilis* fogalomnak nevezzük.

A köznyelvben a fogalmakat és a fogalmakról alkotott fogalmakat rendszerint egy és ugyanazon nyelvi kifejezési formával jelöljük. Ez a tény logikai hibához, az ún. fogalmak felcserélésének hibájához vezethet. Figyelembe kell venni, hogy az azonos nyelvi kifejezési formában a valóság visszatükrözésének mely szintjén álló fogalom szerepel, hiszen az impredikábilis fogalmak esetében a más-más szinten álló fogalmaknak egymástól eltérő ismertetőjegyei vannak.

Az impredikábilis fogalmaktól eltérően az ún. *predikábilis* fogalmak olyanok, amelyeknél a fogalom és a fogalom fogalmának ismertetőjegyei megegyeznek. Így pl. predikábilis fogalom a „tudati jelenség" fogalom, hiszen a „tudati jelenség fogalma" maga is, mint minden fogalom, tudati jelenség. Predikábilis fogalmak továbbá pl. „színtelen dolog", „fogalom" stb.

A fogalmaknak predikábilis és impredikábilis fogalmakra való felosztása kapcsán beszélnünk kell az e fogalmak alkalmazása közben fellépő ellentmondásokról.

Tegyük fel azt a kérdést, hogy az *impredikábilis fogalom* milyen fogalom, predikábilis, vagy impredikábilis? Ha azt állítjuk, hogy predikábilis, akkor ez azt jelenti, hogy megvan az a sajátossága,

amelynek alapján a fogalmat megalkottuk. Ez a sajátosság az, hogy impredikábilis. Tehát ha predikábilis, akkor impredikábilis.

Ha azt állítjuk, hogy impredikábilis, akkor ez azt jelenti, hogy a fogalomnak nincs meg az a sajátossága, amelynek alapján megalkottuk. Mivel a fogalom az, hogy „impredikábilis" és ez a sajátossága nincs meg, tehát az impredikábilis nem-impredikábilis vagyis predikábilis. Így arra az eredményre jutottunk, hogy ha az impredikábilis impredikábilis, akkor predikábilis. Az antinómiák e fajtáját Russell-féle antinómiának nevezzük. Az ilyen antinómiák lényegének könnyebb megértéséért vegyünk egy egyszerű példát. Két gyerek, Pisti és Vera játék közben összevesztek. Hosszas vita után a fiú így szól: — Jó, legyen a tied a labda! Okos enged, szamár szenved! Én engedtem, tehát én vagyok az okos, te vagy a szamár. Vera „felpaprikázott" hangulatban volt, ebbe se akart belenyugodni.

— Nem igaz, én vagyok az okos, te vagy a szamár!

— Én engedtem, én vagyok az okos, te vagy a szamár!

A vita így folyt tovább egy darabig, míg végül Pisti—aki ezúttal valóban példásan békességkedvelő volt — így szólt: — Jó, okos enged, szamár szenved; én engedek, tehát mégis én vagyok az okos és te vagy a szamár!

Igen ám! De ő most miben engedett? Mibe adta a beleegyezését? Abba, hogy ő a szamár, hiszen ez volt a vita tárgya! Tehát így: *ő* „szamár" és „nem-szamár".

Mit lehet válaszolni a gyerekek problémájára? Pisti „okos", vagy „szamár"? Más szinten „okos" és más szinten „szamár". Csak azt mondhatjuk: — Gyerekek, „az okos enged, szamár szenved!" játékra nem lehet alkalmazni az okos enged, szamár szenved játékot.

Minden fogalom valamely a fogalmat megelőző szinten levő objektumról, létezési körről alkotott fogalom. Egyetlen fogalom sem lehet fogalom önmagáról. Minden fogalom válhat objektummá, de ezen objektum vizsgálata csak egy más fogalomszinten történhet. A Russell-féle antinómiák a dialektikus materializmus igazát bizonyítják. *A valóság fogalmakban való visszatükrözése egyetlen történeti korszakban sem lehet befejezett.* A megismerésben mindig magasabb és magasabb szintre jutunk el. E szintek absztrakciós

láncot alkotnak, amely lánc minden láncszeme tovább és tovább vezet a totalitás megismeréséhez. Az új láncszem tartópillérei az előző láncszemek.

Az egymásra épülő megismerési síkok végtelen sokasága képes csak teljes totalitásában átfogni a megismerés objektumát. De a megismerésnek nincs elvi határa, bármely objektumról alkothatunk fogalmat, mindig magasabb és magasabb szinteken, és e szintek összegével ismerhetjük meg a valóságot.

GYAKORLATOK:

4. Állapítsuk meg az alábbi fogalmak közül melyek predikábilis és melyek impredikábilis fogalmak

szó
fogalom
26 jellel kifejezhető fogalom

3. A FOGALMAK FAJTÁI

3.1. ÁLTALÁNOS, EGYEDI ÉS ÜRES FOGALMAK

A fogalomban általánosított tárgyak mennyisége alapján megkülönböztethetünk általános, egyedi és üres fogalmakat.

Általános fogalom az olyan, amelynek a terjedelmébe egynél több dolog tartozik. Így pl. „áru", „virág", „egyetemi hallgató" általános fogalom.

A gondolkodás objektuma általános fogalomnál is egyed, nevezetesen (x) a fogalom terjedelmét alkotó osztályból. Például az „egyetemi hallgató" fogalom esetében egyedről gondolkodunk, de nem egy meghatározott egyedről, hanem (x)-ről az egyetemi hallgatók csoportjából, ahol (x) helyébe bármely egyedet helyezhetjük, aki rendelkezik az egyetemi hallgató sajátosságával.

Az „egyetemi hallgató" más nyelvi formában így fejezhető ki: „az az x, aki rendelkezik az egyetemi hallgatónak levés ismertetőjegyével". Mivel (x) helyébe több, különböző egyedet helyettesíthetünk, ezért „az egyetemi hallgató" fogalma általános fogalom.

Egyedi fogalom pl. „Magyarország fővárosa", „prímszám 2 és 4 között", „Eötvös Loránd Tudományegyetem Filozófiai Könyvtára". Az egyedi fogalom terjedelmét egy tárgy alkotja.

A hagyományos logikában nem különböztették meg az egyedi terminusokat az egyedi fogalmaktól. Az egyedi fogalom éppen úgy mint az általános fogalom, ismertetőjegyek alapján általánosítás. Az előbb említett példát véve „prímszám 2 és 4 között" más formában így fejezhető ki: (x), amely prímszám 2 és 4 között. A fogalom logikai formája nem különbözik az általános fogalom formájától. Ez utóbbi éppen úgy változót tartalmaz, mint az általános fogalom. Az eltérés csak annyi, hogy itt (x) helyébe csak egy dolgot helyettesíthetek, a változót csak egy érték elégíti ki.

Az egyedi terminus nem változó, hanem konstans, egy *meghatározott* tárgy megjelölését szolgálja. Egyedi terminusokat annak alapján képezünk, hogy valamely egyedi fogalom alapján kiemeljük a fogalom terjedelmét alkotó egyelemű osztály elemét és ezt megjelöljük nyelvi jellel.

Üres fogalomnak nevezzük az olyan fogalmat, amelynek terjedelme üres osztály, az osztálynak nincs egy eleme sem. Az üres fogalmak a *tudat aktivitásának*, viszonylagosan önálló mozgásának következményei. Az a tény, hogy minden fogalom általánosítás, kiemelés következménye, lehetőséget teremt arra, hogy olyan fogalmak jöjjenek létre, amely fogalmak tartalmát alkotó ismertetőjegyek egysége egyetlen reális tárgynak sem sajátja, tehát a fogalom terjedelme üres. Mennyiben tükrözik a valóságot ezek az ún. *üres fogalmak?* Induljunk ki pl. a keresztény vallás „isten" fogalmából. E fogalom tartalmát alkotó ismertetőjegyek („mindentudó", „abszolút igazságos" stb.) egyetlen dolognak sem sajátjai. De az e fogalom tartalmát alkotó ismertetőjegyek is a valóságból való absztrakció eredményei. (A „tudás" fogalma szükséges a „mindentudó" fogalmának megalkotásához. A „tudás" fogalma emberi sajátosságokról alkotott fogalom, az „igazságosság" fogalma ugyanígy reálisan létező viszonylatok absztrakciója.) Tehát az

„isten" fogalmát alkotó ismertetőjegyek a valóság visszatükrözésének eredményei, maga az „isten" fogalom az előrehaladó megismerés fájának hajtása, de torz hajtása. Ez a fogalom is a valóságot tükrözi vissza, az anyagi valóság viszonyai, sajátosságai tükröződnek benne, de eltorzult formában. Lenin erről a következőket írja:

„Amikor az (emberi) elme az egyes dologhoz nyúl, másolatot (fogalmat) készít róla, ez *nem* egyszerű, nem közvetlen, nem tükörszerűen holt, hanem bonyolult, kettéhasadt, cikcakkos aktus, amely *magában foglalja* azt a lehetőséget, hogy a képzelet elrepül az élettől; sőt mi több; azt a lehetőséget, hogy az elvont fogalom, az eszme *átalakul képzeletté* (végső fokon = istenné) (méghozzá úgy, hogy az ember észre sem veszi, nem ismeri fel az átala kulást)."[6]

„Primitív idealizmus: az általános (a fogalom, az eszme) *külön lény*. Ez furcsának, szörnyű (helyesebben: gyermeteg) képtelenségnek látszik. De vajon nem ilyen fajta *(tökéletesen* ugyanilyen fajta) a modern idealizmus, Kant, Hegel, az isten eszméje?"[7]

„Az emberi megismerés kettéhasadása és az idealizmus (= vallás) *lehetősége adva van* már az *első*, *elemi* elvonatkoztatásban: a »ház« általában és az egyes házak."[8]

Hozzátehetjük ehhez, hogy az ismeretek előrehaladásával, az absztrakciósképesség fejlődésével az emberi elme egyre bonyolultabb torz absztrakciók létrehozására képes. Ez az egyik feltétele és oka annak, hogy az idealizmus minden történeti korszakban új, álcázottabb formát vesz fel.

Az üres fogalmak körébe nemcsak olyan fogalmak tartoznak, amelyek torz visszatükrözései a valóságnak. Nem minden üres fogalom vadhajtás a tudás fáján. Az üres fogalmak egy részének igen fontos szerepe van a megismerésben, a tudományokban. Így pl. „abszolút nulla fok hőmérsékleten levő anyag", „szomszédos racionális számok" stb. üres fogalmaknak jelentős szerepük van a szaktudományokban. Annak a tételnek a kimondásához pl., hogy „szomszédos racionális számok nincsenek", szükség volt a „szomszédos racionális számok" fogalom megalkotására.

Vannak olyan fogalmak, amelyekről nem tudjuk, üres fogalmak-e vagy sem. Ismertetőjegyek kiválasztása alapján megalkottuk a „Naprendszerünkön kívüli élőlények" fogalmat. A tudomány jelenlegi fejlettsége mellett nem tudjuk, tartoznak-e a fogalom terjedel-

mébe dolgok vagy nem, üres-e a fogalom terjedelme vagy nem. Ez a tény arra mutat, hogy a fogalomalkotás nem mindig megy úgy végbe, hogy kiválasztunk meghatározott tárgycsoportot és megvizsgáljuk, melyek a közös sajátosságaik. Jelen esetben a fogalomalkotás nem a tárgycsoport, hanem meghatározott ismertetőjegyek kiválasztásával kezdődik és csak miután *adott* a fogalom tartalma, keressük a fogalom terjedelmébe tartozó tárgyakat. Ez az eljárás olyan út, amely az absztrakttól (kiemelt ismertetőjegyek) közelíti meg a konkrétat (a tárgy egészét).

3.2. KONKRÉT ÉS ABSZTRAKT FOGALMAK

A gondolkodás objektumainak jellege szerint meg lehet különböztetni konkrét és absztrakt fogalmakat.

*A konkrét fogalmak*ban tárgyakról alkotunk fogalmat, az *absztrakt fogalmak*ban — elvonatkoztatva attól, hogy mely tárgyak rendelkeznek e tulajdonságokkal, viszonyokkal — magukról a tulajdonságokról, viszonyokról alkotunk fogalmat, e tulajdonságok, viszonyok ismertetőjegyei alapján. Így konkrét fogalom pl. város, társadalom, élőlény stb. Absztrakt fogalom pl. egyenlőség, oszthatóság, eszmeiség, jóság stb.

A fogalmaknak absztrakt és konkrét fogalmakra való felosztása egyáltalán nem jelenti azt, hogy a konkrét fogalmak megalkotása nem absztrakciós folyamat eredményeként jön létre. Minden fogalomalkotás — legyen az akár absztrakt, akár konkrét fogalom megalkotása — ismertetőjegyek absztrahálását feltételezi a tárgy egészétől, ennek összes ismertetőjegyeitől. Olyan fogalom, mely a tárgy összes ismertetőjegyeit magában foglalja, nem létezik és nem is létezhet.

A tárgy egészétől való absztrahálás módjában különbségek vannak. Ha az elvonatkoztatás kiemel a tárgyból valamely ismertetőjegyet és ez az ismertetőjegy válik a gondolkodás tárgyává — nem véve figyelembe a továbbiakban, hogy mely tárgyak sajátja ez az ismertetőjegy —, akkor *absztrakt* fogalmakhoz jutunk. Ha viszont nem abból a célból emeljük ki a tárgy ismeretetőjegyét, hogy ezt a tárgytól magától izoláljuk, hanem azért, hogy ezeken az ismertető-

jegyeken keresztül magát az adott tárgyat jellemezzük valamely oldalról, akkor *konkrét* fogalmat alkotunk.

Meg kell jegyezni, hogy a fogalmaknak absztrakt és konkrét fogalmakra való felosztása nem abszolút érvényű. Tudjuk, hogy a megismerés különböző szinteken valósul meg, hogy naiv az az elképzelés, amely feltételezi a tárgyak lapos síkját és vele szemben a megismerés síkját. Az, ami egyik vonatkozásban, egyik rendszerben tulajdonság, viszony, más szinten maga is lehet *tárgy*, amelynek tulajdonságai, viszonyai vannak. Ezért az absztrakt fogalmak különböző fokairól, hierarchiájáról lehet csak beszélnünk, nem pedig egytípusú osztályáról.

GYAKORLATOK:

5. Osszuk két csoportba az alábbi fogalmakat abból a szempontból, hogy általános vagy egyedi fogalmak-e?

emberiség
ember
világegyetem
Naprendszer

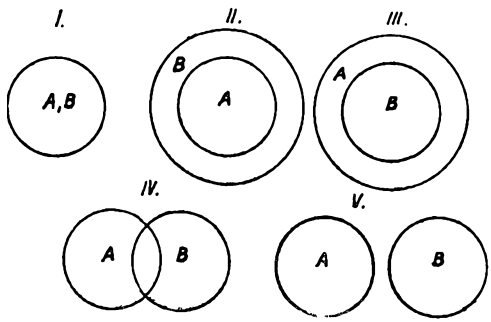
6. Keressük ki az alábbi fogalmak közül az üres fogalmakat, az absztrakt fogalmakat.

Az alanyeset ragja a magyar nyelvben
Szerénység
Negatív szám
Jupiter

4. A FOGALMAK KÖZÖTTI VISZONYOK

A fogalmak közötti viszonyokon fogalmak terjedelme közötti viszonyokat értünk. A továbbiakban a fogalmak közötti viszonyok közül csak azokat a viszonyokat tárgyaljuk, amelyek két nem-üres terjedelmű fogalom között állanak fenn.

Ábrázoljuk egy körrel valamely fogalom terjedelmét, vagyis a tárgyaknak azt a csoportját, melyet gondolatilag kiemeltünk a fogalom megalkotásakor. Nevezzük ezt a kört „A" körnek. „A" körnek valamely más „B" körrel a következő kapcsolatai lehetségesek:



Vagyis a két kör lehet egyenlő terjedelmű (I), lehet, hogy az egyik kör nagyobb, és a másik, kisebb terjedelmű kör beletartozik a terjedelmébe (II, III), vagy, hogy terjedelmük részben egybeesik (IV) és végül lehet, hogy a két kör teljesen egymáson kívül fekszik (V).

Térjünk most vissza a fogalmakhoz, köröknek feleltessük meg tárgyak csoportjait.

EKVIVALENS FOGALMAK

Ha két fogalom megalkotásakor a tárgyaknak ugyanazt a csoportját választjuk ki, csak más-más ismertetőjegyek alapján, ha a két fogalomban („*A*" és „*B*") tükröződő tárgyak köre megegyezik, a fogalmakat *ekvivalens* fogalmaknak nevezzük. (I.) Ha csak a fogalmak terjedelmét vesszük figyelembe (extenzionális logika), akkor az egyenlő terjedelmű fogalmak azonosak, nem különböznek egymástól.

Ilyen ekvivalens fogalmak: „Magyarország legnagyobb ipari városa", — „Magyarország közigazgatási központja", „Egyenlő oldalú háromszögek"—„Egyenlő szögű háromszögek", „»Az Apostol« c. vers szerzője"—„A »Talpra magyar« szerzője". Az ekvivalens

fogalmak tartalmukat tekintve nem azonos fogalmak, más-más gondolatot fejeznek ki. Semmiképpen sem szabad ezeket összetéveszteni a nyelvi szinonimákkal. Nyelvi szinonimák közül logikai szempontból tetszés szerint választhatunk egy és ugyanazon gondolat kifejezésére, de az ekvivalens fogalmaknál már gondolkodási hibára vezethet, ha egyiket a másik helyett használjuk.

Logikai alárendeltségi viszonyban van két fogalom, ha az egyik terjedelmébe beletartoznak mindazok a dolgok, amelyek a másik fogalom terjedelmébe tartoznak, viszont ezen második fogalom terjedelmébe még az első fogalom terjedelmébe tartozó tárgyakon kívül más tárgyak is tartoznak. (II. és III.) A terjedelmileg nagyobb fogalmat *nemfogalomnak*, a kisebbet *fajfogalomnak* nevezzük. Ilyen „nem és faj" viszonyában levő fogalmak pl. „élőlény", — „állat", „diák", — „egyetemi hallgató", „szám", — „párosszám". Az „élőlény" fogalom terjedelmébe beletartozik minden állat, de az állatokon kívül más élőlények is vannak. Ezért az „élőlény" fogalom nemfogalom az állat fajfogalmához képest. Természetesen az állat fogalma más fogalmakkal, pl. az emlősállat fogalmával kapcsolatban már nemfogalom.

A „nem" és „faj" viszonyában levő fogalmakra érvényes a *tartalom és terjedelem fordított viszonyának törvénye*. E törvény szerint mindazok az ismertetőjegyek, amelyek ismertetőjegyei a nemfogalomba tartozó minden egyes tárgynak, ismertetőjegyei lesznek a fajfogalom tárgyainak is. Viszont a fajfogalom ismertetőjegyeinek csak egy része ismertetőjegye a nemfogalom minden egyes tárgyának. Így a terjedelmileg több tárgyat magába foglaló fogalom mindig veszít a fogalom tartalmát alkotó ismertetőjegyekből fajfogalmához képest. A terjedelmileg szűkebb fajfogalom tartalmának viszont mindig vannak olyan további ismertetőjegyei, amelyek nem tartoznak a nemfogalom tartalmába.

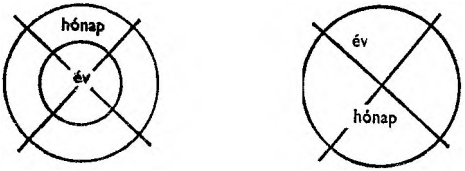
Így pl. a „háromszög" fogalmának terjedelmébe a „derékszögű", „hegyesszögű", „tompaszögű" háromszögek tartoznak. A háromszög fogalmába tartozó minden egyes tárgynak lényeges ismertetőjegyei: „zárt mértani síkidom", „három egyenes oldal által határolt idom". Ha ezekhez az ismertetőjegyekhez hozzátesszük azt, hogy „olyan sík idom, amelynek egyik szöge 90°", a fogalom terjedelméből kiszorulnak a hegyes- és a tompaszögű háromszögek és

a „háromszög" fogalmának egyik fajfogalmához a „derékszögű háromszög" fogalmához jutunk el.

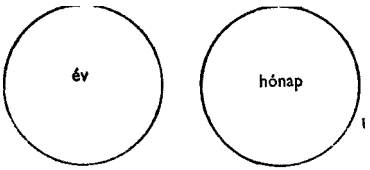
Ennek a törvénynek a tárgyak és jelenségek kapcsolatában reális alapja van. Ugyanis a tárgyak egy nagyobb csoportjának kevesebb olyan tulajdonsága van, amellyel minden egyes tárgycsoportba tartozó tárgy rendelkezik, mint ugyanezen tárgyak egy részéből álló tárgycsoportnak.

A fogalmak közötti terjedelmi viszonyokat nem szabad összetéveszteni a térbeli, időbeli, rangbeli stb. viszonyokkal.

Gyakori hiba pl. a nem és faj viszonyának összetévesztése a rész és egész viszonyával. Milyen viszony van pl. „év" és „hónap" fogalmak között? Első pillanatra úgy gondolhatjuk, hogy mivel az év a nagyobb időegység, a hónap a kisebb, tehát az „év" a nemfogalom, a „hónap" a fajfogalom. Vagy a másik megoldási kísérlet: Ezek egyenlő terjedelmű fogalmak, hiszen az évben mindig van hónap és a hónap mindig valamely év hónapja.



Természetesen egyik megoldás sem helyes. Év és hónap összeegyeztethetetlen fogalmak.

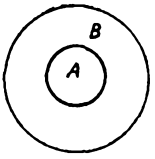


A hónap fogalmának más ismertetőjegyei vannak, mint az évnek. Az évnek *részei* a hónapok. Az „év" ismertetőjegye pl. az, hogy tizenkét hónap alkotja, de ez nem ismertetőjegye a „hónap"-nak,

holott ha fajfogalma lenne az évnek, a nemfogalom ismertetőjegyei a fajfogalom tárgyairól is elmondhatók lennének. Ugyanígy „erdő" és „fa", „igazgató" és „osztályvezető" fogalmak között nincs nem és faj viszonylat.

A tartalom és terjedelem fordított viszonya törvényének érvényességét egyes logikusok kétségbe vonják. Valójában a törvény ellen felhozott érvek nem a törvényt magát bírálják, hanem csak ennek helytelen értelmezését. A tartalom és terjedelem fordított viszonyának törvényét ugyanis semmiképpen sem szabad úgy értelmezni, mintha e törvény szerint egyrészt terjedelmileg szűk, de tartalmilag még gazdag, másrészt tartalmilag szegényes, de terjedelmileg tág fogalmak között kellene választanunk. Az ismeretek mélysége egyáltalán nem függ az ismertetőjegyek mennyiségétől. A fajfogalomhoz viszonyítva kevesebb ismertetőjeggyel rendelkező nemfogalom semmiképpen sem jelent a nemfogalom tartalmi értékére nézve elszegényedést, elszürkülést.

A nem és faj viszony megállapításánál néha a nyelvi forma is megtévesztő lehet. Ilyen tévedés eredménye az ún. Bolzano-féle „paradox". Bolzano[9] azt állítja, hogy nem érvényes a tartalom és terjedelem fordított viszonyának törvénye és ezt a tételt többek között az alábbi példával akarja bizonyítani. A „minden európai nyelvet ismerő emberek" és a „minden európai élő nyelvet ismerő emberek" fogalmak közül a második fogalom terjedelme szélesebb (hiszen több olyan ember van, aki minden európai élő nyelvet ismer, mint olyan, aki minden európai nyelvet ismer), és tartalma is a másodiknak nagyobb (hiszen itt hozzátettük az ismertetőjegyet, hogy *élő* nyelv ismerője). Valójában nincs itt paradox. A „minden európai élő nyelv ismerői" terjedelmileg szélesebb fogalomtól a „minden európai nyelv ismerői" fogalomhoz úgy jutunk el, ha elhagyunk ismertetőjegyet. Ugyanis ez utóbbinak ismertetőjegye, hogy az *élő* és a *holt* nyelvek ismerői. Más dolog az, hogy a nyelv néha akkor tartja szükségesnek valamely ismertetőjegy kifejezését, amikor leszűkül az ismertetőjegyek mennyisége, vagyis nő a fogalom terjedelme. Jelen esetben éppen ez áll fenn. A logikailag szabatosított nyelvi kifejezéssel tehát világos, hogy ez a példa nem alkalmas a tartalom és terjedelem közötti fordított viszony törvényének cáfolatára.



A = Minden európai élő + holt nyelv ismerői
B = Minden európai élő nyelv ismerői

Keresztezési viszonynak (IV. ábra) nevezzük két fogalom, terjedelmének olyan viszonyát, amikor mindkettő terjedelmében van olyan tárgy, mely a másik fogalom terjedelmébe is beletartozik, de olyan tárgy is van, amely csak valamelyik fogalom terjedelmébe tartozik. A két fogalomba tartozó tárgyak ismertetőjegyei szempontjából ez azt jelenti, hogy az „*A*" fogalomban általánosított tárgyak között van olyan, amely rendelkezik „*B*" fogalom ismertetőjegyeivel és „*B*" fogalom tárgyai között van olyan, amelynek megvannak azok az ismertetőjegyei, amelyek alapján „*A*" fogalmat megalkottuk.

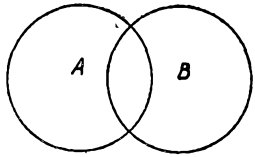
Ilyen kereszteződési viszonyban levő fogalmak pl. „KISZ-tag" és „egyetemi hallgató". A „KISZ-tag" ismertetőjegyei az egyetemi hallgatók egy részének ismertetőjegyei és az egyetemi hallgató fogalom terjedelmébe tartoznak olyanok, akik a KISZ-tag terjedelmébe is beletartoznak. További példák: „Zenekedvelő" és „költő", „fából készült tárgy" és „bútor", „páros szám" és „törzsszám".

Összeegyeztethetetlenségi viszonyban (V.) van két fogalom, ha az egyik fogalom terjedelmébe csak olyan dolgok tartoznak, amelyek nem tartoznak a másik fogalom terjedelmébe. Például „békeharcos" — „háborús uszító", „fém" — „fa", „jó barát" — „ellenség".

Hogyan lehet bizonyítani, hogy két fogalom között valóban ezek és csak ezek a viszonyok lehetségesek?

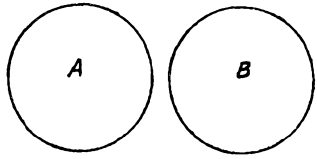
Tételezzük fel, hogy „*A*" és „*B*" fogalom között nem áll fenn sem az azonossági, sem az alá-fölérendelési, sem az összeegyeztethetetlenségi viszony. Bizonyítsuk be, hogy ebben az esetben fenn áll a kereszteződési viszonylat. A tétel ellenkezőjével fogunk bizonyítani. Feltételezzük, hogy nem áll fenn a kereszteződési viszonylat sem, és kimutatjuk ennek lehetetlenségét.

Annak, hogy a kereszteződési viszony nem áll fenn, három oka lehet

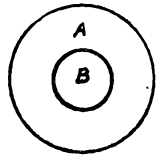


1. Nincs olyan „*A*", amely „*B*".
2. Nincs olyan „*B*", amely nem „*A*".
3. Nincs olyan „*A*", amely nem „*B*".

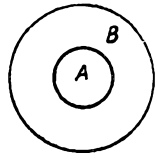
Vegyük sorra a három esetet. Az első esetben *A* és *B* összeegyeztethetetlen, mivel ha nincs olyan *A*, amely *B*, akkor:



A második esetben minden *B* beletartozik *A*-ba, mivel ha nincs olyan *B*, amely nem *A*, akkor:

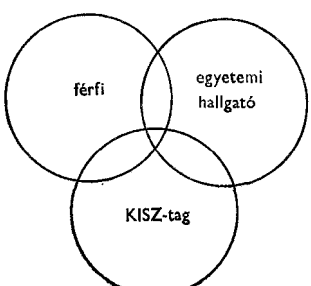


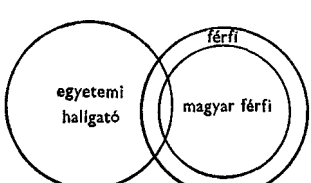
A harmadik esetben *A* beletartozik *B*-be, mivel ha nincs olyan *A*, amely nem *B*, akkor:



Ezzel bizonyítottuk, hogy ha nem áll fenn a kereszteződési viszonylat, akkor fennáll valamelyik az I—II—III—V. közül és ha I., II., III., V. viszony egyike sem áll fenn, akkor fennáll a kereszteződési viszony. Tehát: a fenti öt viszony valamelyike feltétlenül fennáll két fogalom között.

Az eddigiekben a fogalmak közötti viszonyok vizsgálatánál csak *két* fogalom kapcsolatát vizsgáltuk meg. Három fogalom kapcsolata már jóval több lehetőséget ad. Hiszen ez a harmadik fogalom lehet az első két fogalommal azonos, de lehet különböző viszonyban is. Így pl. a „férfi" fogalma az „egyetemi hallgató" és a „KISZ-tag" fogalmakkal egyaránt keresztező viszonyban van, de pl. a „magyar férfi" már más-más viszonyban van a „férfi" és az „egyetemi hallgató" fogalmakkal. (Az „egyetemi hallgató" fogalmával keresztező viszonyban van, a „férfi" fogalmának viszont fajfogalma.)





Három vagy több fogalom lehetséges kapcsolatából csak azokat a kapcsolatokat említjük, amelyek további vizsgálódásaink szempontjából jelentősek:

Mellérendeltségi viszonynak nevezzük az egy nemfogalmon belüli összeegyeztethetetlen fajfogalmak viszonyát. Ilyen mellérendelt

fogalmak pl. „férfi" és „nő" (az „emberek nemük szerint" nemfogalmon belül), vagy „esztergályos" és „lakatos" (az „emberek szakmájuk szerint" nemfogalmon belül).

A mellérendeltségi viszonynak két speciális esetét külön elnevezéssel jelölik. Az egyik az ellentmondó, a másik az ellentétes fogalmak viszonya.

Ha két fogalom, amely összeegyeztethetetlenségi viszonyban van, úgy tartozik bele egy harmadik nemfogalomba, hogy terjedelmük együttvéve a „nem" fogalom terjedelmét alkotja, akkor *ellentmondási viszony* áll fenn. Az ellentmondási viszony már feltételezi egy harmadik fogalom megalkotását, mely a két fogalmat egy egységbe foglalja. Ellentmondási viszony áll fenn pl. a „társadalmi osztályok szerkezete" nemfogalmon belül, a „dolgozó osztályok" és a „nem-dolgozó osztályok" fogalmak, mint fajfogalmak között. Az ellentmondási viszony a fogalmak ismertetőjegyei szempontjából azt jelenti, hogy az egyik fogalomban *bizonyos* közös ismertetőjegyek alapján kiemeljük a nemfogalom egy fajfogalmát (dolgozó) és a nemfogalom összes többi tárgyát, amelyek nem rendelkeznek ezekkel az ismertetőjegyekkel — az ellentmondó fogalomban egyesítjük (nem-dolgozó).

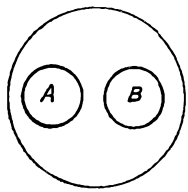
A fogalmak közötti viszonyok tárgyalásánál az eddig említett viszonyokon kívül rendszerint még a fogalmak ellentétes viszonyát említik a logikatankönyvekben. Azonban a fogalmaknak ellentétes fogalmakra való felosztása már nem terjedelmi viszonyon alapuló felosztás. Míg az összes eddig tárgyalt fogalmi viszonyokat definiálni lehetett csupán a fogalmak terjedelmét figyelembe véve, az ellentétességi viszony nem definiálható a fogalmak terjedelme alapján. Hiányzik e fogalmi viszony definíciója általában is. Azt mondhatnánk: ellentétességi viszony áll fenn egy nemfogalmon belül két olyan fajfogalom között, amelyek ismertetőjegyei a legnagyobb eltérést mutatják. De ezt magunk sem tarthatjuk szabatos definíciónak, hiszen eléggé meghatározatlan, mi a kritériuma annak, hogy mely ismertetőjegyek mutatják a legnagyobb eltérést? Ilyen ellentétes fogalmak: „burzsoá" és „proletár" a kapitalista társadalom osztályai nemfogalmon belül, vagy „jó" és „rossz", „bátor" és „gyáva". Kérdéses továbbá az is, hogy az ellentétességi viszony olyan általános viszony-e, mint a megelőzőleg tárgyaltak. A fogal-

mak többségénél értelmetlennek tűnik a fogalom ellentétes fogalompárjáról beszélni. (Például mondhatjuk, hogy a „fehér" ellentéte a „fekete", de mi az ellentéte a „vas"-nak?)

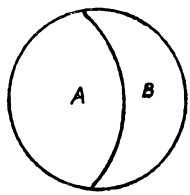
Ennek ellenére bizonyos esetekben, ha egy nemfogalmon belül kettőnél több faj létezik, fontos az ellentmondó és az ellentétes fogalmak közötti különbség ismerete. Ezek összetévesztése a mindennapi életben is súlyos hibákhoz vezethet. Például „barát" és „nem-barát" ellentmondó fogalmak, de nem szabad a „nem-barát"-ot összetéveszteni a „barát" ellentétes fogalmával az „ellenség"-gel. Harcolnunk kell azok ellen, akik csak „fehér" és „fekete" szélső ellentétben tudnak gondolkodni, és ezen ellentétes viszonyt felcserélik a színek végtelen skálájával.

Az összeegyeztethetetlenségi viszony itt vizsgált eseteit a következőképpen ábrázolhatjuk:

mellérendeltségi viszony



ellentmondási viszony

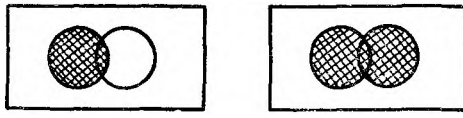


Tisztán a logika eszközeivel két nem-összetett fogalom (pontosabban két olyan fogalom, amelynek összetételét nem tárjuk fel) egymáshoz való viszonyát nem lehet megállapítani. Logikailag két nem-összetett fogalom egymáshoz való viszonyában minden lehetőség fennállhat. Lehetnek terjedelmének közös és eltérő részei, és lehetnek olyan dolgok, amelyek egyik fogalom terjedelmébe sem tartoznak bele. Megválaszolni azt a kérdést pl., hogy milyen viszony van a „hárommal osztható számok" és a „hattal osztható számok" között — ha ezeket nem-összetett fogalomnak tekint-

jük —, nem lehet a logika keretei között maradva. Csak matematikai ismeretekre támaszkodva állapíthatjuk meg, hogy a „hattal osztható számok" fajfogalma a „hárommal osztható számok" fogalomnak.

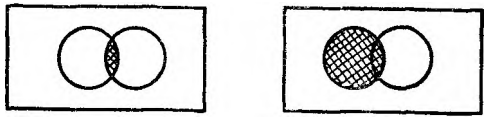
Hogyan tanulmányozható az osztály-logika eszközeivel valamely összetett fogalomnak más egyszerű vagy összetett fogalomhoz való viszonya?

Milyen viszony van pl. a „sportoló" és a „sportoló vagy diák" fogalmak között?

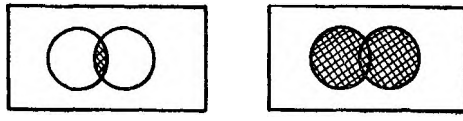


A sportoló fogalom terjedelme a „sportoló vagy diák" fogalom terjedelmébe beletartozik, ezért a „sportoló vagy diák" fogalom nemfogalma a „sportoló" fogalomnak.

A „sportoló és diák" fogalom, valamint a „sportoló" fogalom közötti viszonyt az alábbi ábrákról lehet leolvasni:



A „sportoló" nemfogalomnak fajfogalma a „sportoló-diák" fogalom. Milyen viszony van a „sportoló-diák", valamint a „sportoló vagy diák" fogalmak között?



A „sportoló vagy diák" fogalomnak fajfogalma a „sportoló diák" fogalom. A fogalmak közötti viszonyokról elmondottakkal szemben felmerülhet az az ellenvetés, hogy a valóság bonyolult össze-

függéseit zárt körök viszonyával akarjuk leírni, holott a valóságban nincsenek egymással éles határvonalakkal elválasztott csoportok. Bizonyos esetekben — merülhet fel a gondolat — valóban lehet merev határokat megállapítani, de mélyebben megvizsgálva, ezek kölcsönösen átszövik egymást, átmennek egymásba. „Állat" és „növény" az elmondottak alapján mellérendelt fogalmak, de mit kezdjünk azokkal az élőlényekkel, amelyek átmeneti formák e kettő között? Vagy az állatfajokat vizsgálva, az egyes fajokon belül végtelen számú különbözőség, amelyek egészen a faj jellegének áttöréséig fokozódhatnak, nem azt kell hogy eredményezzék, hogy a merev fajokra osztást mélyebb vizsgálódás esetén megszüntessük?

Valóban helytelen a valóság tárgyait és jelenségeit merev „skatulyákba gyömöszölni". De ezt nem is akarja a logika. A formális logika a már bizonyos ismertetőjegyek kiemelésével *megalkotott*, kész fogalmak közötti viszonyokat vizsgálja. Fennállhat olyan eset, amikor igen nehéz eldönteni, valamely tárgyat milyen osztályba soroljunk, de ilyenkor egy *osztályozási*, *besorolási* nehézséggel állunk szemben és ez nem érinti azt a kérdést, hogy meglevő fogalmainknak valóban zártkörűeknek kell-e lenniük. Sok esetben előfordul, hogy olyan tárgyakkal, jelenségekkel találkozunk, amelyeket meghatározott ismertetőjegyek alapján megalkotott, *meglevő* fogalmaink egyikével sem tudunk kifejezni. A kész fogalmak osztályozása ilyenkor éppen kiindulópontot jelent a fogalmak fejlődése számára. Ugyanis bizonyos besorolási nehézség éppen az új fogalmak kialakításának szükségletét eredményezheti vagy a meglevő fogalmak pontosabbá tételét követelheti. Továbbá a „merev állatfajokat" kifejező fogalmak elengedhetetlenül fontos feltételei annak is, hogy megérthessük, a valóság tárgyai és jelenségei nincsenek éles határvonalakkal elzárva egymástól. Ez a gondolkodásnak egy igen érdekes sajátossága. A zártkörű, „merev" fogalmak a valóság dialektikus kölcsönhatásai megértésének kiindulópontjai. Ebből következik, hogy a fogalmak viszonyainak formális logikai elemzését nem felváltani kell más elemzéssel, hanem kiindulópontul kell felhasználni, hogy továbbléphessünk, megérthessük a valóság dialektikus kapcsolatait, a valóság dialektikus kapcsolatain alapuló fogalmak fejlődését.

GYAKORLATOK:

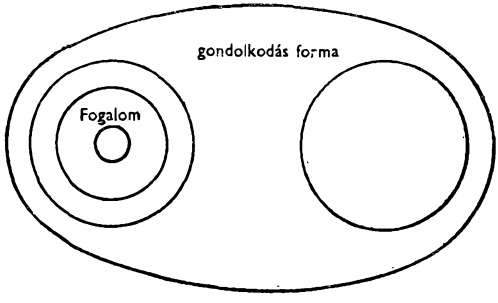
7. Állapítsuk meg az alábbi fogalompárokról, milyen viszony van közöttük:

a világ első szocialista országa — Földünk legnagyobb területű országa
egyetemi hallgató — magyar állampolgár
végtag — testrész
kéz — kar

8. Az alábbi fogalmak közül válasszuk ki azokat, amelyek között alá-fölérendeltségi viszony van:

év
megye
szökőév
hónap
járás
igazgató
titkárnő
gimnáziumi igazgató

9. Írjunk az üres körökbe az ábrázolt fogalmi viszonyoknak megfelelő fogalmakat:



5. A MEGHATÁROZÁS

Számos logikakönyv a meghatározást a logika szemantikai problémái között tárgyalja. A meghatározást konvenciónak tekintik, megállapodásnak valamely szó használatára vonatkozóan. Mint a továbbiakban látni fogjuk, ez csak a meghatározás egyik fajtájának, az ún. nominális meghatározásnak a jellemzője. A reális meghatározások a fogalom és a valóság kapcsolatán alapulnak és ez indokolttá teszi, hogy a meghatározás problémáival e helyen foglalkozzunk.

5.1. A NOMINÁLIS MEGHATÁROZÁS

A köznyelv szavainak jelentését az anyanyelv elsajátításával a gyakorlat folyamatában ismeri meg az ember. A gyerek nem úgy tanul meg járni, hogy megmondják neki előre, hogyan használja lábait. Ugyanígy anélkül, hogy előzetesen meghatároznák, milyen esetekben használhatja az „asztal", „étel", „alvás" stb. szavakat, a gyakorlatban megtanulja használni e kifejezéseket és nem okoz problémát a helyes alkalmazásuk. Eltérő ettől a helyzet a tudományok szókészletével kapcsolatban. Ha a tudományok speciális szavainak jelentését nem adnánk meg definíciókban, akkor ez lehetetlenné tenné a tudományos megismerést.

Meghatározásra szükség lehet viták esetében is. Gyakran ilyenkor derül ki, hogy a vitát a vitában használt fogalmak meghatározatlansága okozta: más-más fogalomtartalommal használták a vitatkozó felek ugyanazt a nyelvi kifejezést.

Az oktatási folyamatban is fontos szerepe van a meghatározásoknak. A tanulók számára ismeretlen fogalmak bevezetését meghatározásokkal szokás kezdeni. Előfordul, hogy azért nem tudják a diákok az új ismereteket kapcsolatba hozni a régebben szerzettekkel, azért „magolás" a tanulásuk, mert az anyagrészben szereplő fogalmak tartalma nem tisztázott előttük.

A meghatározások célja, feladata — mint a fenti példák is mutatják — különböző lehet. A *nominális* meghatározás célja megmutatni, mely tárgycsoportot választottuk ki abban a fogalomban,

amelyet az adott szóval jelölünk. Így pl. mit nevezünk „gondolkodógép"-nek, mit nevezünk „rombusz"-nak stb.? E kérdéseket meg lehet válaszolni nominális meghatározásokat alkalmazva.

A nominális meghatározásban adott nyelvrendszer valamely szavát megfelelési viszonyba állítjuk bizonyos fogalommal. A nominális meghatározás nem a névvel megjelölt dologról, hanem magáról a nyelvi jelről ad információt.

A nominális meghatározásoknak különböző fajtái léteznek. A *szemantikai definíció* a nyelvi jel értelmét adja meg. Arra mutat rá, hogy mely fogalom nyelvi kifejezője az adott jel.

A *szintaktikai definíció* a nyelvi jelek egymással történő helyettesítésére ad szabályokat.

A szintaktikai definíciók további alfajokra bonthatók:

1. *Explicit definíció.* Rendszerint akkor használják, amikor valamely tudományos rendszerbe új fogalmat vezetnek be. Az új fogalom nyelvi kifejezésére új szót alkotnak. Az explicit meghatározás az új szó és a fogalomnak más, a meglevő szókészlet szavaival való kifejezése közötti megfelelőségi viszonyt állapít meg. Pl. explicit meghatározást használunk az implikáció műveletének bevezetésénél a következő esetben:

$$p \to q = \overline{p \wedge \bar{q}} \text{ df.}$$

Általános formában az explicit definíció a következő szerkezetű:

$$A = B \text{ df.}$$

2. *Kontextuális definíció.* Azoknak a feltételeknek a megadását tartalmazza, amelyek között a kifejezés használható. Például a „konjunktív normálforma" kontextuális meghatározásának tekinthető a következő: „Valamely formula akkor és csak akkor konjunktív normálforma, ha az (legfeljebb) diszjunkciók olyan konjunkciója, ahol a diszjunkciós tagok változók, több tag nem szerepel együttesen tagadva, egy-egy konjunkciós tagban egy-egy változó legfeljebb egyszer szerepel (negálva vagy negálatlanul) és nincs a formulában két olyan konjunkciós tag, amely legfeljebb csak a diszjunkciós változók sorrendjében tér el egymástól.

Kontextuális definíciónak tekinthető a „hős" következő meghatározása: „Egy ember akkor és csak akkor hős, ha az a cseleke-

det, amelyet végrehajtott, társadalmilag hasznos, súlyos nehézségek leküzdésével (áldozattal) járt együtt és veszélyes volt."

3. *Rekurzív definíció.* A matematikában és általában a deduktív tudományokban gyakran használt meghatározási eljárás. A rekurzív definíció olyan ítéletek összegével történik, ahol minden ítélet az őt megelőző ítéletből van levezetve. Így pl. a „kijelentés" rekurzív meghatározása a kijelentéskalkulusban a következő:

1. $p, q, r \ldots$ stb. kijelentések
2. Kijelentésekből a kijelentéslogika műveleteinek alkalmazásával ismét kijelentést kapunk.

4. *Implicit definíció.* Ellentétben az explicit definícióval, ahol a meghatározandó egymagában áll, a meghatározó egyenlet bal oldalán, az implicit definíciónál a meghatározandó más kifejezésekkel összekapcsolva fordul elő.

Például a „feszültség" *explicit* meghatározása: feszültség = = „potenciálkülönbség"; a „feszültség" *implicit* meghatározása: „Az elektromos erőtér két pontja közötti feszültség egyenlő a két pont potenciáljának a különbségével."

Ebben az esetben a „feszültség"-et az „elektromos erőtér", „két pont" kifejezésekkel összefüggésben határoztuk meg.

5.2. A REÁLIS MEGHATÁROZÁS

A nominális meghatározástól eltérően a *reális* meghatározás célja a fogalomalkotás alapját képező dolgokról információt adni. A nyelvi jel viszonyában a reális meghatározás a név denotátumáról közöl ismeretet. Ez esetben a fogalom tartalmának feltárása csak eszköz a fogalomalkotás alapját képező dolgokról meglevő ismereteink összefoglalásához. Így egy adott megismerési folyamat kezdeti szakaszában alkalmazott meghatározás összegezi a kiindulópontul szolgáló ismereteket, a kutató munka egyes szakaszainak befejezésekor adott meghatározások az elért eredmények összefoglalását adják.

A nominális meghatározástól eltérően a reális meghatározásoknál felvethető az igazság kérdése: Valóban azok-e a dolog lényeges

tulajdonságai, viszonyai, amelyeket a róluk alkotott fogalom tartalma magába foglal? Sikerült-e a fogalomban a dolog lényegét megragadni, vagy nem?

A reális meghatározások körébe tartozik a *genetikus meghatározás*. Ez esetben a meghatározás olyan sajátosságok megadásával történik, amely sajátosságok a meghatározandó tárgy keletkezési módjára mutatnak rá. Genetikus meghatározás pl. a következő: „A napfogyatkozás olyan jelenség, amely akkor áll elő, ha a Hold a Nap és a Föld között foglal helyet, azon a vonalon, amely összeköti a Nap és a Föld középpontját."

Szerkezetileg a reális meghatározás általában ún. nem és faj segítségével történik. (A nominális meghatározások is lehetnek ilyen szerkezetűek.) Ezen szerkezet vizsgálatára térünk most át.

5.3. A NEM ÉS FAJ ALAPJÁN TÖRTÉNŐ MEGHATÁROZÁS

E meghatározás (definitio fit per genus proximum et differentiam specificam) a fogalom tartalma és terjedelme közötti fordított viszonyon alapul. Tudjuk, hogy a fajfogalom tartalmazza a nemfogalom összes ismertetőjegyét. Ezt az összefüggést felhasználva, a meghatározás leggyakoribb módja az, hogy kiválasztunk egy nemfogalmat és megadjuk azokat az ismertetőjegyeket, amelyek az illető fajfogalmat megkülönböztetik a nemfogalomba tartozó összes többi fajfogalomtól.

E meghatározás szerkezetileg a következő részekre bontható.
Meghatározandó: (Az a fogalom, amit meg akarunk határozni.)
Meghatározó: (Azok a fogalmak, melyekkel meghatározunk.)
A meghatározó részei:

Nemfogalom
Faji sajátosság.

Például: A négyszög olyan zárt mértani síkidom, amelyet négy egyenes oldal határol. Jelen meghatározásban a meghatározandó: négyszög, a nemfogalom: „zárt mértani síkidom", a faji megkülönböztető sajátosság: „amelyet négy egyenes oldal határol".

A „nem" és a „faji sajátosság" megadásával nem minden fogalmat lehet meghatározni. Mindig magasabb nemfogalmat használva ugyanis szükségképpen el kell érkeznünk a láncolatban egy olyan ponthoz, ahol az illető tudományágban már szélesebb nemfogalmat nem tudunk megadni. Ezeket a fogalmakat kategóriáknak nevezzük. A kategóriák meghatározása egymáshoz való viszonyuk megadásával történik. Így pl. a filozófia legszélesebb kategóriája: az anyag. Az anyag fogalmának filozófiai meghatározása nem történhet az anyag fogalmához képest valamely nemfogalom megadásával, hiszen az anyagon és ennek megnyilvánulásain kívül nem létezik semmi sem.

Az anyag filozófiai fogalmát Lenin határozta meg, nem valamely nemfogalom segítségével, hanem a tudat kategóriájához való viszonyának megadásával, azzal, hogy rámutatott az anyag elsődlegességére a tudattal szemben.[10]

A hagyományos logika összegyűjtötte azokat a követelményeket, amelyeket a helyes meghatározással szemben támasztani kell. E szabályok a meghatározás céljából következnek. Arra mutatnak rá, hogyan kell végrehajtanunk a meghatározás logikai műveletét, hogy az feladatának eleget tudjon tenni. Ezek az úgynevezett meghatározási szabályok különböző értékűek, egy részük valóban szorosan e logikai művelet helyes elvégzésével kapcsolatos, más részük viszont inkább a nyelvi kifejezés lehetséges tévedéseit akarja elhárítani. Néhány szabály általános érvényű minden meghatározásra, más részük speciálisan csak a nem-faj szerkezetű meghatározásokra vonatkoztatható. Mivel a helyes gondolkodásra való nevelés szempontjából értékesek, hozzásegítenek a tudatos logikus gondolkodás kialakításához, az alábbiakban röviden ismertetjük e követelményeket.

5.4. A MEGHATÁROZÁS SZABÁLYAI

1. *A meghatározandó és a meghatározó terjedelmének egyenlőnek kell lennie.*

Ez a szabály a meghatározás feladatából következik. A meghatározásnak az a feladata, hogy feltárja a fogalom tartalmát. Mivel a

szükséges és elégséges ismertetőjegyek együttese alkotja a fogalom tartalmát, ezért ha a meghatározó nem ugyanolyan terjedelmű, mint a meghatározandó, akkor nem mutatja meg a fogalom tartalmát.

E szabály megsértéséből kétféle hiba származhat:

a) Túl tág a meghatározás, ha a meghatározó (az említett szerkezetű meghatározás esetén a „nem" és a „faji sajátosság") nem foglalja magában a fogalom tartalmának meghatározásához elégséges ismertetőjegyet. Egy vagy több ismertetőjegy hiánya következtében a meghatározó nem határolja körül kellőleg a meghatározandó körét. Ilyen túl tág, hibás meghatározás a következő: „A kapitalizmus kizsákmányoláson alapuló társadalmi rendszer." A meghatározás túl tág, hiszen nemcsak a kapitalizmus kizsákmányoláson alapuló társadalmi rendszer, hanem a többi osztálytársadalmak is.

b) Túl szűk a meghatározás, ha a meghatározó szükségtelen ismertetőjegyet is tartalmaz. Ilyen túl szűk, hibás meghatározás a diktatúrának a következő Kautskytól származó meghatározása: „A diktatúra valamely személy hatalma, amelyet semmiféle törvény nem korlátoz, és mely közvetlenül az erőszakra támaszkodik." A „valamely személy hatalma" nem szükséges ismertetőjegy és ezért a meghatározás túl szűk, mivel diktatúra az is, ha valamely csoport vagy osztály kezében van a hatalom.

2. *A meghatározásnak nem szabad körben forognia.*

Amikor valamely fogalom tartalmát fel akarjuk tárni, nem szabad magát a meghatározandó fogalmat felhasználni. Így pl. az említett szerkezetű meghatározás esetén a nemfogalomnak a meghatározandó fogalomtól valóban különböző, általánosabb fogalomnak kell lennie, a faji sajátosságnak a meghatározandó fogalomra való hivatkozás nélkül kell a meghatározandót jellemeznie. Nem szabad meghatározóként pl. a meghatározandó fogalommal szinonim, más nyelvi kifejezést adni. Ennek a szabálynak a megsértése az ún. körben forgó meghatározás. Például „szorzásnak nevezzük azt a műveletet, amikor egyik számot megszorozzuk a másikkal",

3. *A meghatározásnak világosnak kell lennie.*

Minden fogalmat olyan módon kell meghatározni, hogy a meghatározásban már ismert tartalmú fogalom szerepeljen. Főleg pedagógiai jelentőségű szabály: Csak ismert anyagból kiindulva tudunk az ismeretlen megismerése felé haladni. A szabály megsértéséből keletkező hiba, az ismeretlen tartalmú fogalmakra való hivatkozás: a homályos meghatározás.

4. *A meghatározás nem lehet tisztán tagadó.*

Valamely dolog megismeréséhez már az is közelebb visz, ha megállapítjuk, milyen tulajdonságok, kapcsolatok nem jellemzőek rá. Azonban tovább is kell haladni a megismerésben, nemcsak azt kell megállapítani, milyen ismertetőjegyek hiányoznak, hanem azt is, melyek jellemzők az adott dologra. Például a „nyelv"-nek mint társadalmi jelenségnek a megismeréséhez nem elegendő annak megállapítása, hogy a nyelv nem tartozik sem az adott társadalom gazdasági alapjához, sem ennek felépítményéhez, továbbá, hogy nem osztályjellegű társadalmi jelenség. Meg kell azt is állapítani, hogy melyek azok a lényeges ismertetőjegyek, amelyek megkülönböztetik a nyelvet minden más társadalmi jelenségtől.

A szabály elnevezése félreérthető. Semmiképpen sem jelenti azt, hogy nem szabad negatív fogalmakkal végezni a meghatározást. Így pl. nem hibás, hanem a matematikában elfogadott helyes meghatározása a transzcendens számnak: olyan (valós vagy komplex) szám, amely *nem tesz eleget* egész együtthatójú algebrai egyenletnek. De ez a meghatározás nem tisztán tagadó! Azt mutatja meg, hogy milyen „nem"-be (szám) tartozik bele a meghatározandó (transzcendes szám) és faji sajátosságként egy tulajdonság hiányát adtuk meg, amely jellemző az adott számra. Ezzel elhatároltuk minden más számfajtától.

A meghatározások eszközei, segítői a megismerési munkának, de nem egyenlő értékűek a kifejtéssel, nem pótolhatják azt.

A reális meghatározás csak valamely oldalról, vonatkozásban, megközelítő módon ismertet meg a dolgok sajátosságaival. Ebből következőleg más-más vonatkozásban különböző meghatározást adhatunk egy és ugyanazon dologról. Például a „gömb" szokásos definíciója: „egy adott ponttól egyenlő távolságra levő

pontok halmaza". De definiálhatjuk másképpen is: „A gömb az a felület, amelyet egy kör ír le, ha egyik rögzített átmérője körül forog."

A meghatározások korlátolt eszközei a megismerésnek továbbá azért is, mert nem határozhatunk meg minden fogalmat. Mivel minden fogalom meghatározásához más fogalmakat használunk fel (mégpedig olyanokat, amelyek már ismertek), ezért mindig lesznek olyan fogalmak, amelyeket egy adott tudományrendszeren belül már nem határozunk meg, meghatározás nélkül fogadunk el. Nincsenek azonban mindenkorra meghatározatlan fogalmak. Az a fogalom, amelyet ma meghatározás nélkül használunk, a jövőben meghatározottá lesz. De természetesen akkor is lesznek új fogalmak, amelyek még meghatározásra várnak. Az a fogalom, amely egy zárt tudományrendszeren belül nem kerül meghatározásra, egy tágabb rendszerben — amely több fogalmat tartalmaz — meghatározható.

A meghatározások jelentőségét az oktatómunkában sem szabad túlbecsülni. A meghatározások itt is csak segítői lehetnek a részletes elemző kifejtésnek, de nem pótolhatják azt. A tanulók által használt meghatározások értékét a meghatározásokra épülő — vagy az ezt megelőző — részletes kifejtés adja meg.

GYAKORLATOK:

10. Állapítsuk meg, az alábbi példák a nominális meghatározás mely típusába tartoznak:

$$(x = \log y) \leftrightarrow (y = b^x)$$

$$p \leftrightarrow q = p \bar{\vee} q \text{ df.}$$

Ha egy test hőmérséklete alacsonyabb, mint az emberi test hőfoka, akkor ezen test hőmérsékletét hidegnek nevezzük.

11. Elemezzük az alábbi meghatározásokat: Válasszuk ki a meghatározandót és a meghatározót. A meghatározóban keressünk nemfogalmat és a faji ismertetőjegyeket:

Azt a mondatot, amelyben az alanyon és az állítmányon kívül bővítményeket is találunk, bővített mondatnak nevezzük.

Az „A" betű a magyar ábécé első betűje.
Az összetett ítélet olyan ítélet, amelynek igazsága kizárólag az őt alkotó ítéletek igazságának függvénye.

12. Állapítsuk meg, kielégítik-e a meghatározás ismertetett szabályait az alábbi meghatározások, jelöljük meg a meghatározandó és a meghatározó terjedelme közötti összefüggést:

A földbirtokos olyan ember, aki a parasztokat kizsákmányolja.
A diplomácia békés operatív munka az állam külpolitikájának megvalósítására.
A matematikai logika a matematikai módszerek alkalmazásával kidolgozott formális logika.

6. A FELOSZTÁS

A felosztás a fogalom terjedelmének feltárását szolgáló logikai művelet. A felosztás logikai osztályozás.[11] A felosztás célja a fogalomban általánosított tárgyak egymástól minőségileg különböző csoportjainak elhatárolása. A fogalom terjedelmének feltárása a fajfogalmak megjelölésével történik. Egy fogalom fajfogalmainak összessége a fogalom teljes terjedelmét, a fogalom felosztását adja.

Adott fogalomban általánosított tárgyak sok szempontból különbözhetnek, és sok szempontból egyezhetnek meg egymással. Ezért ha a fogalom fajfogalmait keressük, mindig ki kell választani valamilyen szempontot, melynek alapján fajtákra bontjuk az adott fogalomba tartozó tárgyakat. Az a sajátosság, melynek alapján felosztáskor a fajfogalmakat megkülönböztetjük egymástól, a *felosztás alapja*. Pl. más-más ismertetőjegyet véve a felosztás alapjául, a háromszögeket felosztathatjuk hegyesszögű, tompaszögű, derékszögű háromszögekre (a felosztás alapja: a szögek nagysága), vagy egyenlőtlen oldalú, egyenlőszárú, egyenlő oldalú háromszögekre (oldalaik nagysági viszonya szempontjából).

A logika történetében a meghatározáshoz hasonlóan a felosztással kapcsolatban is kidolgozták azokat a követelményeket, amelyek biztosítják a felosztás műveletének helyességét. Ezek a

szabályok sem egyenértékűek. Az alapvető szabály: *A felosztás tagjai terjedelmének együttesen egyenlőnek kell lennie a felosztandó fogalom terjedelmével.* Ahhoz, hogy feltárjuk egy fogalom terjedelmét, sem több, sem kevesebb fajtára nem mutathatunk rá, mint amelyek mindegyikének sajátjai a fogalom tartalmát alkotó ismertetőjegyek. E szabály követése valóban feltétele minden helyes felosztásnak.

A többi, a hagyományos logikában felsorolt szabály megsértése nem feltétlenül vezet logikai hibához. E szabályok inkább a hibák *lehetőségétől* óvnak. Azokat az eseteket sorolják fel, amelyek eredményezhetik, hogy a felosztás tagjainak együttes terjedelme nem egyenlő a felosztandó fogalom terjedelmével. Ezek a kiegészítő szabályok a következők:

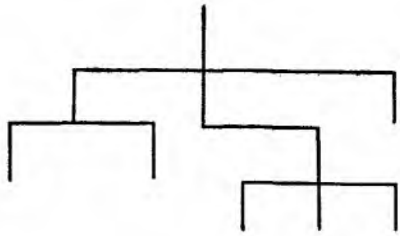
1. *A felosztásnak egy alapúnak kell lennie.*

Az alapszabály megsértéséhez vezethet, ha a fogalomban általánosított tárgyak egy részét egy valamilyen sajátosság alapján különböztetjük meg, más részét más sajátosság alapján. Ezt a hibát *több alapú felosztásnak nevezzük.* Például a filmeket helytelen: tudományos, játék-, mese- és dokumentumfilmekre osztani. Itt két alap keveredik: *a)* filmek tartalmuk szerint; *b)* filmek elkészítési módjuk szerint.

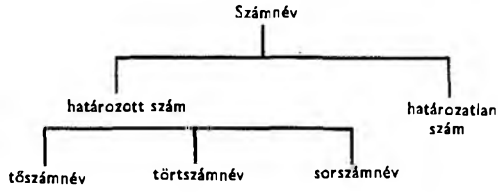
Az eddigiekből világos az a követelés, hogy a felosztásnak egy alapúnak kell lennie nem jelenti azt, hogy csak egy módon lehet felosztani valamely fogalmat. Felosztható többféleképpen, de ez mind más-más felosztás lesz. Csak *egy felosztáson belül* nem keveredhet a felosztási alap, de természetesen miután egy alapon már elvégeztük a felosztást, logikai vétség nélkül áttérhetünk valamely más alapon történő felosztásra. Sőt egymás után minél több alapból kiindulva végzünk felosztást, annál alaposabban ismerjük meg a fogalom terjedelmébe tartozó dolgokat.

2. *A felosztásnak folyamatosnak kell lennie.*

Célszerű a felosztandó fogalmat először fajfogalmaira felosztani és csak azután tovább haladni a fajfogalmak fajfogalmaihoz. Sematikusan ezt a szabályt a következőképpen ábrázolhatjuk pl.



A felosztás folyamatosságával kapcsolatos hiba az *ugrás a felosztásban*. Például a számnév helytelen felosztása: határozatlan számnév és tőszámnév. Az alapszabály megsértése itt a felosztásban való ugrás következménye. A helyes felosztás a következő:



3. *A felosztás tagjainak ki kell zárniuk egymást.*

Az előző szabályokkal szorosan összefüggő szabály. Ha a felosztást egy alapon végezzük és ha nem vétünk a folyamatosság ellen, akkor a tárgycsoportok pontosan elhatárolódnak egymástól.

Helytelen pl. a háborúnak igazságos, igazságtalan és felszabadító háborúkra való felosztása. A felszabadító háború az igazságos háború közé tartozik, és így a felosztás tagjai nem zárják ki egymást.

A felosztás műveletének fontos szerepe van a logikus gondolkodásban. Felosztás segítségével új, még eddig nem ismert jelenségek felfedezésére is lehetőség van. Ismeretes pl., hogy Mengyelejev az elemek periódusos rendszerének táblázatát elkészítve (az elemek felosztásával) olyan elemek létezésének szükségességét is előre feltárta, amelyek tényleges létezését csak a felosztás után fedezték fel. Ebben az esetben a felosztás tudományos előrelátáshoz vezetett.

GYAKORLATOK:

13. Határozzuk meg a felosztás alapját az alábbi felosztásokban:
A fogalmak lehetnek predikábilisak és impredikábilisak.
Az emberiség története őskorra, ókorra, középkorra, újkorra és legújabbkorra oszlik.
A szótárak lehetnek két- vagy többnyelvű és egynyelvű szótárak.

14. A tizenhármas gyakorlatban felosztásra került fogalmakat osszuk fel más felosztási alapokból kiindulva.

15. Péter az alábbi könyveket kapta ajándékba:

Mikszáth: Különös házasság, Móricz: Erdély, Kosztolányi: Nero, Németh László: Iszony, Illyés Gyula: Puszták népe, Petőfi összes versei, Jókai: Erdély aranykora, Arany: Balladák, Babits: Jónás könyve, Marx: A tőke, József Attila összes versei, Engels: A természet dialektikája, Lenin: Materializmus és empíriokriticizmus, Vörösmarty: Csongor és Tünde, Lenin: Állam és forradalom.

A könyveket három polcon akarja elhelyezni. Milyen felosztási alapot javasolunk?

IV. AZ ÍTÉLETEK FINOMSZERKEZETÉNEK LOGIKÁJA

Eddig olyan ítéletekkel foglalkoztunk, amelyek igazsága kizárólag a részeiket képező ítéletek igazságának függvénye, az alkotó ítéletek igazságértékének ismeretéből kiszámítható az ítélet igazságértéke. Az összetett ítéletektől eltérően az egyszerű ítéletek igazságának megállapításához már az ítélet ún. finomszerkezetét kell vizsgálat alá venni. Az ítélet finomszerkezetét az ítélet logikai alanya (alanyai) és az ítélet logikai állítmánya alkotja. Az *ítélet logikai alanya* az, amiről az ítéletben állítunk, az ítélet *logikai állítmánya* az, amit állítunk a logikai alanyról. Az egyszerű ítéletek igazsága annak függvénye, hogy az ítélet alanyáról, illetve alanyairól valóban állítható-e a logikai állítmány vagy sem.

Az egyszerű ítéletek szerkezetével, az ilyen ítéletekkel végzett következtetésekkel az ítéletek finomszerkezetének logikája foglalkozik.

1. AZ ARISZTOTELÉSZI SZILLOGISZTIKA

1.1. A KATEGORIKUS ÍTÉLET

A kategorikus ítéletek, a velük végzett következtetések történetileg első rendszerét Arisztotelész dolgozta ki. Arisztotelész tanítása kiállta az idő próbáját. A modern logika, bár továbbfejleszti, de

Arisztotelész elméletének lényegét nem cáfolja meg. Arisztotelész tanítása a mai logikai ismereteknek is szerves része.

Az ítéletek finomszerkezetének, a velük végzett következtetéseknek vizsgálatát az arisztotelészi logika ismertetésével kezdjük. Itt használunk olyan terminusokat is, amelyek Arisztotelésznél nem szerepelnek — pl. az „osztály" terminust —, mert ez megkönnyíti a kapcsolat megértését a szimbolikus logikai eredmények és az arisztotelészi logika között.

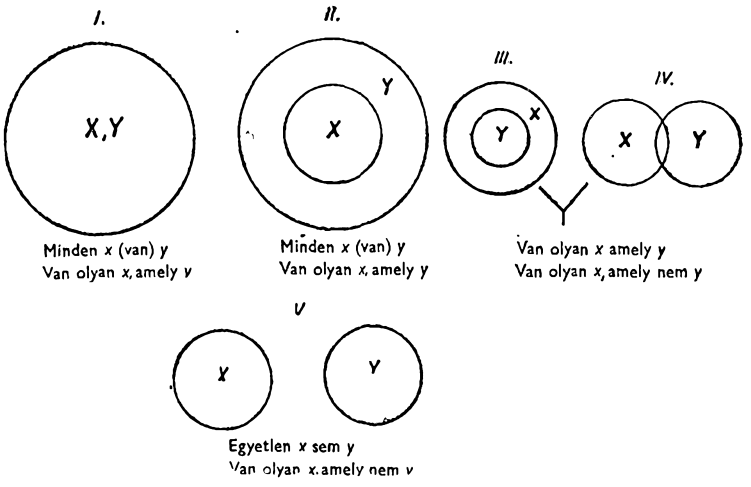
A kategorikus ítéletekben foglalt állítást különböző vonatkozásokban szemlélhetjük. *Terjedelmi* oldalról az ilyen ítélet két osztály közötti viszonyt állapít meg. Így pl. a „Minden vastárgy elektromosságot vezető anyag" ítéletben a „vastárgy" terjedelmébe tartozó dolgokról állítjuk, hogy beletartoznak az „elektromosságot vezető anyagok" osztályába. A fogalmak *tartalma* szempontjából ez az ítélet azt az állítást tartalmazza, hogy a „vastárgy" ismertetőjegyeivel rendelkező dolgok rendelkeznek az „elektromos vezetés" ismertetőjeggyel. A „vastárgy" predikátumai közé tartozik az „elektromos vezetés" predikátum. Vagy más példát véve a „Minden fenyőfa örökzöld" ítélet terjedelmi vonatkozásban a „fenyőfa" és az „örökzöld dolgok" közötti kapcsolatot állapít meg, más vonatkozásban viszont ez az ítélet a „fenyőfa" és egy predikátum („örökzöldnek levés") kapcsolatát állapítja meg.

Az arisztotelészi logika a kategorikus ítéleteket terjedelmi szempontból vizsgálta. A modern logika osztálykalkulusában ezek az ítéletek szintén terjedelmi interpretációt kapnak. A modern logika egy másik fejezete, a predikátumok logikája a kategorikus ítéleteket mint predikátumok közötti kapcsolatokat értelmezi.[1]

Kategorikus ítéletnek Arisztotelész olyan gondolatformát nevez, amely valamit állít vagy tagad valamiről, mégpedig oly módon, hogy ez a valami vonatkozik-e valamire vagy sem.[2] A kategorikus ítélet — arisztotelészi értelemben — két nem-üres fogalomra bontható fel,[3] az egyik annak a fogalma, amiről állítunk valamit, a másik annak a fogalma, amit állítunk.

A kategorikus ítéletek fajtáját megkaphatjuk, ha kiindulunk két nem-üres általános fogalom terjedelmének lehetséges kapcsolataiból. Két nem-üres általános fogalom terjedelmét a dolgok két nem-üres osztálya alkotja. Tudjuk, hogy ha x és y tetszőleges

két nem-üres fogalom, akkor x-nek y-hoz való viszonya a következő lehetőségek valamelyike:



Mit jelentenek ezek az állítások?

I. „Minden x (van) y" azt jelenti, hogy az x-ek osztályának bármely eleme egyben eleme az y-ok osztályának is. Ez egyben azt is jelenti, hogy létezik (mivel a fogalom nem üres) olyan x elem, amelyik eleme az y-ok osztályának.

II. Ha az x-ek osztálya része az y-ok osztályának, akkor bármely elemét vegyük az x-ek osztályának, ez eleme az y-ok osztályának is.

III. Ha x-ek osztályának része az y-ok osztálya, akkor létezik olyan x, amely eleme az y-ok osztályának, de mivel az y-ok osztálya csak egy részét képezi az x-ek osztályának, ezért van olyan x is, amelyik nem tartozik az y-ok osztályába.

IV. Ha az x-ek és az y-ok osztálya között kereszteződési viszony van, akkor van olyan x, amely mind a két osztálynak eleme, és

van olyan is, amely csak az *x*-ek osztályának eleme, és nem eleme az *y*-ok osztályának.

V. „Egyetlen *x* sem *y*", vagyis az *x*-ek és az *y*-ok osztályának nincs közös eleme. Mivel feltételeztük, hogy *x*-ek osztálya nem üres osztály, tehát van olyan *x*, amely nem eleme az *y*-ok osztályának.

Az I—V. rajz alatti állításokból azt látjuk, hogy négy különböző ítéletet kaptunk *x* elemeinek az *y*-ok elemeihez való viszonyáról.

Ha pl. *x*-ek osztálya a kutyák osztálya, *y*-ok osztálya a hűséges állatok osztálya, a megfelelő helyettesítésekkel a következő ítéleteket kapjuk.

Minden kutya hűséges állat.
Van olyan kutya, amelyik hűséges állat.
Egyetlen kutya sem hűséges állat.
Van olyan kutya, amelyik nem hűséges állat.

Ezekben az ítéletekben az ítélet alanya, az, amiről állítunk, a „kutya" (a kutyák osztályának valamelyik eleme). Az ítélet állítmánya, az, amit az alanyról állítunk, a „hűséges állat" (a hűséges állatok osztályának valamely eleme). Az ítélet alanyát *S* betűvel (a latin „Subjectum" szó alapján), az ítélet állítmányát *P* betűvel (a latin „Praedicatum" szó alapján) jelölve, megkapjuk a kategorikus ítéletek formuláit.

Minden *S* (van) *P*.
Egyetlen *S* sem *P*.
Van olyan *S*, amely *P*.
Van olyan *S*, amely nem *P*.

A kategorikus ítéletek formuláiban a logikai alany és az állítmány az ítélet két terminusa.[4] Ezek jelölésén kívül még két jelcsoportot találunk.

1. „minden", „egyetlen", „van olyan";
2. van, nem (sem).

Az első csoportba tartozó jelek az ítélet terjedelmének jelei. *Terjedelem szempontjából* a kategorikus ítélet lehet egyetemes vagy részleges.

Az *egyetemes ítéletekben* az állítás *S*-ek osztályának minden egyes elemére vonatkozik. Például „Minden négyzet négyszög." „Egyetlen elemet sem lehet vegyi úton felbontani." Az állítás egyetemes voltát nyelvi formában a „minden", „egyetlen" „bármely" stb. szavakkal fejezzük ki.

A *részleges ítéletekben S* osztálynak legalább egy elemére vonatkozik az állítás. Nyelvi jelei: „van olyan", „némely" stb. Pl.: „Van olyan vegyület, amely tartalmaz hidrogént." „Némely kapitalista állam nem polgári demokratikus állam."

A másik jelcsoport jelei az *ítélet minőségének* jelei. A kategorikus ítélet kifejezheti egy osztály elemeinek valamely másik osztályba való beletartozását, ebben az esetben az ítélet minősége szerint állító, vagy egy osztály elemeinek egy másik osztály elemeitől való különbözőségét, ebben az esetben az ítélet minősége tagadó. Az ítélet minőségét jelölő szó a kopula. Állító ítélet kopulája: „van", „amely", „aki", tagadó ítélet kopulája: „nem", „sem", „mely nem". Egyes nyelvekben, így pl. a magyarban is az ítélet minőségének külön jellel való jelölése (pl. van) bizonyos esetekben fölösleges.

Az ítéleteket terjedelem és minőség alapján együttesen felosztva a következő ítélettípusokat kapjuk:

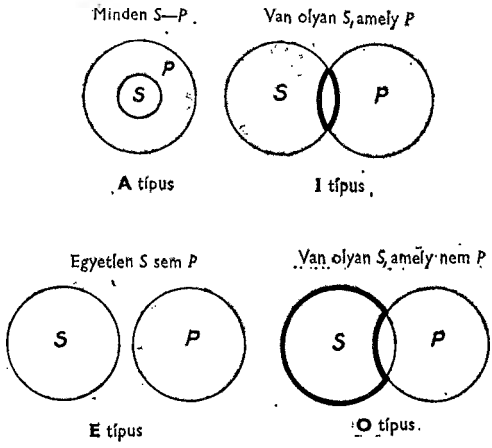
Egyetemes állító ítélet a „Minden *S* (van) *P*" ítélet. Az *S* osztály minden egyes tagja beletartozik a *P* elemek osztályába. A latin „affirmo" (állítani) szó első magánhangzója alapján ezt az ítéletet **A** típusú ítéletnek nevezzük.

Egyetemes tagadó ítélet az „Egyetlen *S* sem *P*" ítélet. Az *S* osztály tagjairól egyetemesen állítjuk, hogy nem tartoznak a *P* osztályt képező dolgok közé. A latin „nego" (tagadni) első magánhangzója alapján **E** típusú ítélet.

Részleges állító ítélet a „Van olyan *S*, amely *P*" ítélet. Az *S* osztálynak van olyan eleme, amely beletartozik a *P* elemek osztályába. Az „affirmo" szó második magánhangzója alapján **I** típusú ítéletnek nevezzük.

Részleges tagadó ítélet a „Van olyan *S*, amely nem *P*" ítélet. Az *S* osztály elemei között van olyan elem, amely nem tartozik a

P elemek osztályába. A latin „nego" második magánhangzója alapján **O** típusú ítélet. A négy kategorikus ítéletet Euler-körrel jelölve a következőképpen fejezhetjük ki:



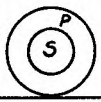
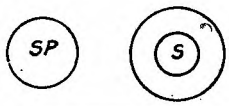
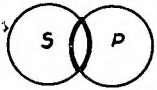
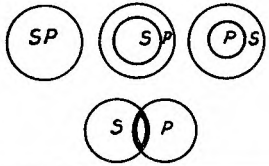
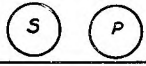
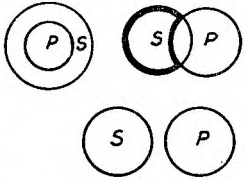
Láttuk, hogy egy-egy kategorikus ítélettípusnak a fogalmak különböző viszonyai felelhetnek meg. E különböző lehetőségekből a körsémával való ábrázolásnál azt választjuk ki, amelyik séma *P* osztályra vonatkozóan a legkevesebb közlést tartalmazza.

A következő táblázat összefoglalja az eddig tanultakat:

(A táblázatot lásd a következő oldalon.)

A KATEGORIKUS ÍTÉLETEK TERMINUSAINAK ELOSZTOTTSÁGA

A következő oldal ábráiból kitűnik, hogy a kategorikus ítéletek bizonyos típusainál minden *S*-ről, illetve minden *P*-ről, más esetekben azonban az *S*-ek, illetve a *P* elemek osztályának csak egy részéről van ismeretünk. Ha egy ítéletben valamely osztály *minden* eleméről — valamely más osztály elemeihez való viszonyáról — szer-

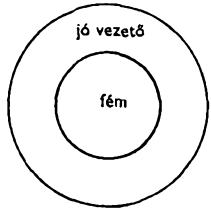
Elnevezés	Logikai forma és ennek körsémával való ábrázolása	Az ítéletek igazsága esetén lehetséges osztálykapcsolatok ábrázolása Euler körökkel	Jelentés	Példa
Egyetemes állító (*A* típus)	Minden *S*—*P* 		*S* minden eleme beletartozik a *P* elemek osztályába.	Minden háromszög három egyenes által határolt zárt síkidom. Minden kutya emlősállat.
Részleges állító (*I* típus)	Van olyan *S*, amely *P* 		Az *S*-ek osztályának van olyan eleme, amely beletartozik a *P* elemek osztályába.	Van olyan háromszög, amely három egyenes által határolt zárt síkidom. Van olyan kutya, amely emlősállat. Van olyan emlős, amelyik kutya. Van olyan kutya, amelyik tarka színű.
Egyetemes tagadó (*E* típus)	Egyetlen *S* sem *P* 		Az *S*-ek osztályának elemei nem elemei a *P* dolgok osztályának.	Egyetlen elem sem vegyi úton felbontható anyag.
Részleges tagadó (*O* típus)	Van olyan *S*, amely nem *P* 		Az *S*-ek osztályának van olyan eleme, amely nem eleme a *P* elemek osztályának.	Van olyan emlős, amelyik nem kutya. Van olyan kutya, amelyik nem tarka. Van olyan elem, amelyik nem vegyi úton felbontható anyag.

zünk információt, akkor az osztályt kifejező terminus (*S*, illetve *P*) elosztott. Nézzük, mikor elosztott a kategorikus ítéletben *S*, mikor a *P* terminus?

	Szubjektum	Predikátum
A	elosztott	—
E	elosztott	elosztott
I	—	—
O	—	elosztott

Példák:

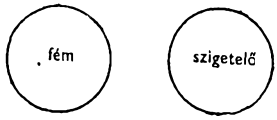
A: „Minden fém jó hővezető



— „fém" elosztott

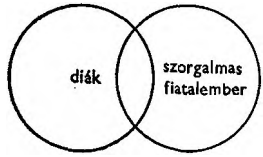
A „jó hővezetők" mindegyikéről nem szereztünk ismeretet. Nem tudjuk, hogy ezek mind fémek, vagy vannak olyan hővezetők, amelyek nem fémek.

E: „Egyetlen fém sem szigetelő"



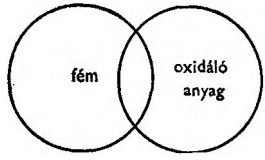
— „fém" elosztott
— „szigetelő anyagok" elosztott

I: „Van olyan diák, aki szorgalmas fiatalember"



— „diák" nem elosztott, mert a diákok mindegyikéről nem tudjuk, hogy szorgalmas fiatalember-e, vagy van olyan diák, aki nem szorgalmas.
— „szorgalmas fiatalember" nem elosztott. Az ítéletből nem tudjuk meg, hogy a szorgalmas fiatalemberek között vannak-e mások is, mint diákok?

O: „Van olyan fém, amely nem oxidálódik"



— „fém" nem elosztott. Az ítéletből nem derül ki, vannak-e egyáltalán olyan fémek, amelyek oxidálódnak, vagy egyetlen fém sem oxidálódik.
— „oxidálódó dolgok" elosztott. Az oxidálódó dolgok mindegyikéről tudjuk, hogy nem azonos azzal a némely fémmel, amely nem oxidálódik.

A KATEGORIKUS ÍTÉLET MEGFORDÍTÁSA

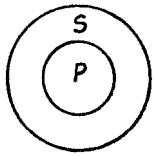
A kategorikus ítéletekben *S*-nek *P*-hez való kapcsolatát állítjuk. Ugyanakkor ezek az ítéletek bizonyos információt tartalmaznak az állítmány körébe tartozó dolgokról is. Ez az információ az ítélettípustól függően kiterjedhet a *P* elemek osztályának valamennyi tagjára vagy csak bizonyos tagjaira. Így pl. az egyetemesen tagadó

ítéletekben nemcsak *S*-nek *P*-hez való viszonya egyértelműen meghatározott, hanem minden *P*-nek *S*-hez való viszonya is az. Hiszen ha egyetlen *S* elem sem tartozik *P* osztályba, akkor „*Egyetlen P sem S*".

Nézzük a többi ítélettípust: Az **A** típusú ítéletnek két különböző osztályviszony felelhet meg. Ezért *P* viszonya *S*-hez nem egyértelműen meghatározott. *Lehet, hogy minden P—S*, de az is lehet, hogy van olyan *P*, amely nem *S*. *P*-ről biztos információnk csak az, hogy *van olyan P, amely S*.

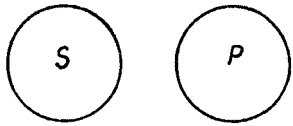
Ha ismert az **I** típusú ítélet igazsága, ebből nem szereztünk tudást minden *P*-nek *S*-hez való viszonyáról. De bizonyos, hogy „*van olyan P, amely S*".

Mit tudunk az **O** ítélet esetében *P*-nek *S*-hez való viszonyáról? Mondhatjuk, hogy „Van olyan *P*, amely nem *S*"? Nem, mert fennállhat



eset is.

Nem mondhatjuk azt sem, hogy „Van olyan *P*, amely *S*", hiszen fennállhat

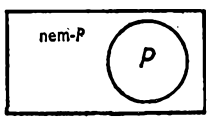


viszony is.

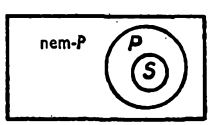
A „*Van olyan S, amely nem P*" *ítéletből* nem szerzünk információt *P*-nek minden *S*-hez való viszonyáról.

Mégis van információnk minden *P*-ről. Ugyanis egyetlen *P* sem azonos azokkal az *S*-ekkel (tehát nem azonos *S* osztály egy részosztályával), amelynek létezését állítja a „Van olyan *S*, amely nem *P*" ítélet.

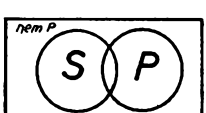
A kategorikus ítéletekben *S*-nek *P*-hez való viszonyán kívül nemcsak *P*-nek *S*-hez való viszonyáról szerzünk burkolt ismeretet. Ismeretet szerzünk *S*-eknek a *P* kiegészítő osztályához, *nem-P*-hez való viszonyáról is. Tudjuk, hogy ha felveszünk egy kiinduló osztályt és ezen belül *P* dolgok osztályát, akkor a nem-*P* osztály elemei mindazok a dolgok lesznek, amelyek nem tartoznak a *P* osztályba.



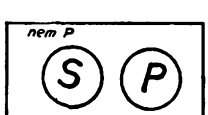
Ha ismert *S* osztály viszonya *P*-hez, ebből meghatározhatjuk *S* osztály nem-*P*-hez való viszonyát.



Ha „Minden *S* — *P*", akkor „Egyetlen *S* sem nem-*P*". Például ha „Minden béka kétéltű", akkor „Egyetlen béka sem nem-kétéltű".



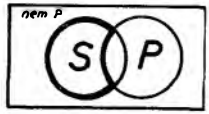
Ha „Van olyan *S*, amely *P*", akkor
„Van olyan *S*, amely nem nem-*P*".
Például: Ha „Van olyan dramaturg, aki író", akkor „Van olyan dramaturg, aki nem nem-író".



Ha „Egyetlen *S* sem *P*", akkor
„Minden *S* — nem-*P*".

Például: Ha „Egyetlen elem sem olyan anyag, amely felbontható vegyi úton", akkor:

„Minden elem olyan anyag, amely nem bontható fel vegyi úton".



Ha „Van olyan *S*, amely nem *P*", akkor

„Van olyan *S*, amely nem-*P*".

Például: Ha „Van olyan munka, amely nem produktív", akkor „Van olyan munka, amely nem-produktív".

GYAKORLATOK:

1. Határozzuk meg az alábbi ítéletek alanyát, állítmányát, állapítsuk meg, a kategorikus ítélet mely típusához tartoznak. Felhasználva ezen ítéletek tartalmának ismeretét, állapítsuk meg, milyen kapcsolat van a valóságban az ítéletben szereplő két osztály között. Ábrázoljuk e kapcsolatot Euler-körökkel.

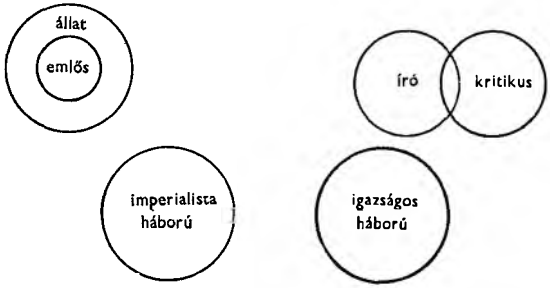
Egyetlen szakaszos végtelen tizedes tört sem irracionális szám.

Nem minden háború igazságtalan.

Van olyan materialista, aki kommunista.

Minden háromszög olyan síkidom, amelynél a szögek összege 180°.

2. Alkossunk igaz ítéleteket a következő terjedelmi viszonyok alapján:



Állapítsuk meg a kapott ítéleteknél, melyik terminus elosztott, melyik nem-elosztott.

3. Végezzük el az átalakítás és a megfordítás műveletét az 1-es gyakorlat ítéletein.

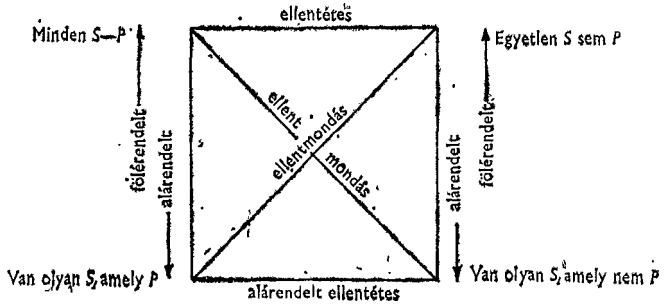
4. Az alábbi ítéletek közül melyek állíthatók elő a „Minden *S*—*P*" ítéletből átalakítás(ok) és megfordítás(ok) révén?

Van olyan *P*, amely *S*.
Egyetlen *S* sem nem-*P*.
Egyetlen nem-*P* sem *S*.
Van olyan nem-*P*, amely nem-*S*.
Van olyan *S*, amely nem-*P*.
Van olyan *S*, amely nem nem-*P*.
Van olyan *S*, amely *P*.

1.2. A KATEGORIKUS ÍTÉLETEK KÖZÖTTI VISZONYOK

A különböző típusú, de egyazon logikai alanyt és állítmányt tartalmazó ítéletek igazságértéke között meghatározott viszonyok állnak fenn. Így pl. ha igaz a „Minden diák szorgalmasan felkészült a mai órára" ítélet, akkor hamis a „Van olyan diák, aki nem készült fel szorgalmasan a mai órára" ítélet, továbbá, ha igaz a „Minden diák szorgalmasan felkészült a mai órára" ítélet, akkor igaz a „Van olyan diák, aki szorgalmasan felkészült a mai órára" ítélet is.

A hagyományos logika az egyazon alanyt és állítmányt tartalmazó kategorikus ítéletek között lehetséges viszonyokat az ún. logikai négyzettel szemléltette.



Ha figyelembe vesszük a 197. oldalon levő táblázatnak azt az oszlopát, ahol az ítéletek igazsága esetén lehetséges osztálykapcsolatokat ábrázoltuk Euler-körökkel, könnyen érthetővé válik a logikai négyzet elrendezése.

A kategorikus ítéletek közötti viszonyokat a következő táblázatokkal is szemléltethetjük:

Adott az igazsága	Milyen információnk van az igazság értékéről?			
	A	**E**	**I**	**O**
A		h	i	h
E	h		h	i
I	?	h		?
O	*h*	?	?	

Adott a hamissága	Milyen információnk van az igazság értékéről?			
	A	**E**	**I**	**O**
A		?	?	i
E	?		i	?
I	h	i		i
O	i	h	i	

GYAKORLATOK:

5. Fogalmazzuk meg a logikai négyzet alapján a „Van olyan háromszög, amely derékszögű" ítélettel különböző logikai viszonyban levő ítéleteket.

6. Állapítsuk meg, milyen viszony van az alábbi ítéletpárok között: Van olyan diák, aki szorgalmas — Nem minden diák szorgalmas — Minden út Rómába vezet — Van olyan út, amely nem vezet Rómába — Minden tőzsdés részvényes — Egyetlen tőzsdés sem részvényes — Egyetlen szigetelő anyag sem fém — Van olyan fém, amely nem szigetelő.

7. Feltételezve, hogy az „Egyetlen bűnös sem ártatlan" ítélet igaz, a logikai négyzet alapján mely ítéletek igazsága, hamissága ismeretes még?

1.3. KÖZVETLEN KÖVETKEZTETÉSEK KATEGORIKUS ÍTÉLETEKKEL

A kategorikus ítéletekkel végzett következtetések közül közvetlennek nevezzük azokat, amelyeknél a zárótétel levonásához premisszaként elegendő egyetlen kategorikus ítélet. Közvetlen következtetésekkel tulajdonképpen már találkoztunk a kategorikus ítéletek tárgyalásánál. Az ítéletek megfordításával, átalakításával kapott ítéletek ugyanis felfoghatók úgy, mint az eredeti ítéletek következményei. Az átalakítással, megfordítással nyert ítéletek és a kiinduló ítéletek között ekvivalencia viszonya áll fenn. Tudjuk, hogy az ekvivalens ítéletek egymás következményei, mivel igazságértékük között nem lehet olyan kapcsolat, hogy az egyik igazsága esetén a másik hamis. A kategorikus ítéletek között megállapított viszonyok szintén érvényes következtetések lehetőségeit rejtik magukban. Például: mivel tudjuk, hogy „Minden *S*—*P*" igazsága esetén igaz a „Van olyan *S*, amely *P*" ítélet is, lehetőségünk van a

Minden *S*—*P*

Tehát: Van olyan *S*, amely *P* következtetés levonására.

Anélkül, hogy hosszabban időznénk ezeknél a közvetlen következtetéseknél, összefoglaljuk a megfordításból, átalakításból és a logikai négyzet alapján adódó közvetlen következtetéseket. Természetesen ezeket a következtetéseket egymás után is elvégezhetjük, ekkor újabb zárótételekhez jutunk. Például:

Minden *S*—*P*.
Tehát: Egyetlen *S* sem nem-*P*.
Tehát: Egyetlen nem-*P* sem *S*.

Kiinduló ítélet	Következmény		
	megfordítással	átalakítással	logikai négyzet alapján
Minden *S*—*P*	Van olyan *P*, amely *S*	Egyetlen *S* sem nem-*P*	Van olyan *S*, amely *P* Nem igaz, hogy egyetlen *S* sem *P* Nem igaz, hogy van olyan *S*, amely nem *P*
Van olyan *S*, amely *P*	Van olyan *P*, amely *S*	Van olyan *S*, amely nem nem-*P*	Nem igaz, hogy egyetlen *S* sem *P*
Egyetlen *S* sem *P*	Egyetlen *P* sem *S*	Minden *S*— nem-*P*	Van olyan *S*, amely nem-*P* Nem igaz, hogy minden *S*—*P* Nem igaz, hogy van olyan *S*, amely *P*
Van olyan *S*, amely nem-*P*	—	Van olyan *S*, amely nem-*P*	Nem igaz, hogy minden *S*—*P*

GYAKORLATOK:

8. Vonjunk le átalakítással, megfordítással és a logikai négyzet alapján következtetéseket az alábbi ítéletekből:

Minden növény élőszervezet.

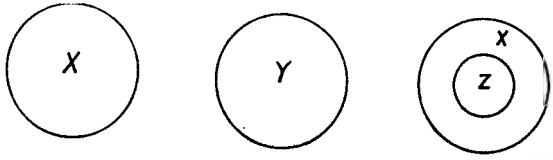
Van olyan fém, amely könnyebb a vasnál.

Van olyan filozófus, aki nem ismeri el a tér és az idő objektív realitását.

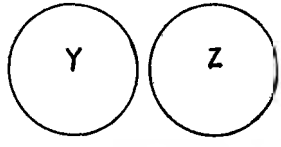
Egyetlen törpe sem bánt rosszul Hófehérkével.

1.4. A KATEGORIKUS SZILLOGIZMUS

A kategorikus szillogizmus három nem-üres osztály közötti viszonyon alapuló szillogisztikus következtetés. Ezekben a következtetésekben ismert valamely osztály elemeinek viszonya két másik osztály elemeihez, és ebből következtetünk a két osztály elemeinek egymáshoz való viszonyára. Induljunk ki az alábbi példából. Ismert, hogy *x* osztály egyetlen eleme sem eleme *y* osztálynak, és ismert, hogy *x* osztálynak *z* osztály részosztálya, vagyis, *z* minden eleme *x*-nek is eleme.

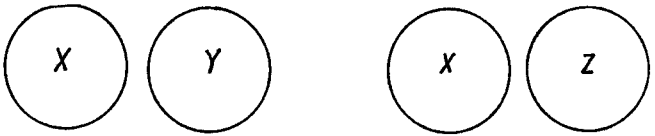


Fenti két előzmény alapján egyértelműen meghatározható *y* és *z* osztály elemeinek viszonya, mivel megállapítható, hogy *z* osztály elemei nem elemei *y* osztálynak.



Nem mindig van azonban lehetőség egy osztály elemeinek két másik osztály elemeihez való viszonya ismeretében egyértelműen meghatározni a két utóbbi osztály egymáshoz való viszonyát.

Például: ha ismert, hogy x osztály elemei nem tartoznak y osztály elemei közé, és hogy x osztály elemei nem elemei z-nek, ebből nem tudjuk egyértelműen meghatározni y és z osztályok viszonyát.



A kategorikus szillogizmus elmélete annak vizsgálata, hogy mikor adódik és mikor nem adódik egy osztály elemeinek két másik osztály elemeihez való viszonyából ez utóbbi kettő viszonyára vonatkozóan kategorikus ítéletben kifejezhető zárótétel.

A KATEGORIKUS SZILLOGIZMUS AXIÓMÁI

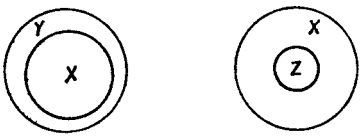
A kategorikus szillogizmusokban kifejeződő osztályviszonyok között van két olyan viszonylat, amely a kategorikus szillogizmus axiómáit alkotja.

E két axióma a következő:

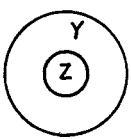
1. Ha x osztály elemei y osztály elemei közé tartoznak és z osztály elemei x elemeinek részosztályát képezik, akkor z osztály elemei is beletartoznak y osztályba (y elemei).

Az axióma tehát a következőt állítja: Ha minden x—y, és ha minden z—x, akkor minden z—y.

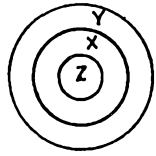
Euler-körökkel kifejezve:



Tehát:

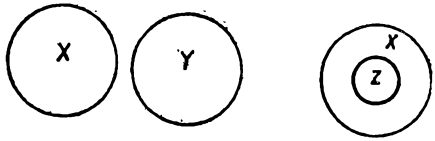


Ugyanis a három osztály viszonya a következő:

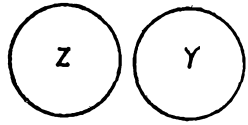


2. Ha x osztály elemei, nem elemei y osztálynak és z osztály részosztálya x osztálynak, akkor z osztály elemei nem elemei y osztálynak. Más formában kifejezve: Ha egyetlen x sem y és ha minden z—x, akkor egyetlen z sem y.

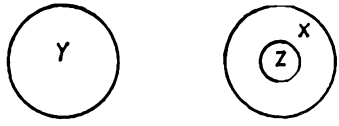
Euler-körökkel ábrázolva az összefüggést, a következőket kapjuk:



Tehát:



Mivel e három kör együttes viszonya a következő:



A KATEGORIKUS SZILLOGIZMUS SZERKEZETE

Vizsgáljuk meg a kategorikus szillogizmus logikai szerkezetét a következő példán:

Minden fém az elektromosságot jól vezető anyag.
Minden réz fém.
Tehát:
Minden réz az elektromosságot jól vezető anyag.

Minden kategorikus szillogizmusban három kategorikus ítélet szerepel. Ezek közül kettő a kategorikus szillogizmus előzménye, egy a szillogizmus zárótétele.

A kategorikus szillogizmusban három terminus szerepel (példánkban: „fém", „elektromosságot jól vezető anyag", „réz"). Mindhárom terminus a következtetésben kétszer szerepel. Azt a két terminust, mely a zárótétel alanyát (példánkban: réz) és állítmányát (példánkban: elektromosságot vezető anyag) alkotja, „*S*", illetve „*P*" betűvel jelöljük. A harmadik terminust (példánkban: fém), amely a zárótételben nem szerepel, de mindkét premisszában egyszer-egyszer megvan, *középső terminusnak* nevezzük és „*M*" betűvel (medius: közép) jelöljük. A középső terminusnak az a szerepe a következtetésben, hogy a két szélső terminus között kapcsolatot teremtsen, mintegy közvetítőként lépjen fel.

Azt az előzményt, amelyben a zárótétel alanya található (példánkban: „Minden réz fém"), *kis premisszának;* azt, amelyben a zárótétel állítmánya fordul elő (példánkban: „Minden fém az elektromosságot jól vezető anyag"), *nagy premisszának* nevezzük. A fentiek alapján következtetés-példánkat így írhatjuk fel:[5]

Minden *M*—*P* (nagy premissza)
Minden *S*—*M* (kis premissza)
Tehát:
Minden *S*—*P* (zárótétel)

Látható, hogy példánkban azok az osztályviszonyok állnak fenn, amelyek a kategorikus szillogizmus első axiómájában szerepelnek. Ezért azt mondhatjuk: fenti következtetés érvényessége közvetlenül a kategorikus szillogizmus axiómájára épül.

Ezenkívül közvetlenül az axiómára épülő következtetésforma még a következő

Egyetlen *M* sem *P*.
Minden *S*—*M*.
Tehát:
Egyetlen *S* sem *P*.

Ez a forma a másodiknak említett axiómával közvetlenül igazolható. A közvetlenül az axiómákra épülő következtetéseken kívül vannak még más érvényes kategorikus szillogizmusok is. A továbbiakban ezek vizsgálatával foglalkozunk.

A KATEGORIKUS SZILLOGIZMUS ALAKZATAI ÉS MÓDOZATAI

Tudjuk már, hogy a kategorikus szillogizmusban három terminus szerepel: *S*, *P* és *M*. Annak, hogy kategorikus szillogizmus létrejöjjön, előfeltétele, hogy legyen két olyan kategorikus ítélet, amelyben egy terminus közös (ezt a terminust nevezzük *M*-nek, középső terminusnak). Így tehát formailag bármely két kategorikus ítéletből, ha van bennük közös terminus, létrehozható kategorikus szillogizmus. Ha eltekintünk az ítéletek terjedelmétől és minőségétől, akkor két ítélet kapcsolatából — az *M* helye szempontjából megkülönböztetve — az alábbi kategorikus szillogizmus formák jöhetnek létre.

I.	II.	III.	IV.
M—P	*P—M*	*M—P*	*P—M*
S—M	*S—M*	*M—S*	*M—S*
Tehát:	Tehát:	Tehát:	Tehát:
S—P	*S—P*	*S—P*	*S—P*

Fenti négy következtetésformát a kategorikus szillogizmus *alakzatainak* nevezzük.

Mivel az alakzatokban szereplő ítéletek mindegyike **A, E, I, O** típus közül valamelyik (pl. mind a három **A** típusú, vagy mind a három **E** típusú, vagy a nagy premissza **A**, a kicsi **E**, a zárótétel **E** típusú stb.), azért egy alakzatban összesen 64 különböző formai lehetőség van szillogizmus létrehozására. Így a négy alakzatban összesen 256 különböző lehetőség van. Ezek alkotják a kategorikus szillogizmus módozatait. Az érvényes következtetések módozata azonban ennél jóval kevesebb. Ha kiszűrjük azokat a kombinációkat, amelyek nem adnak érvényes következtetést, összesen 24 módozat marad fenn. Ezek a kategorikus szillogizmus érvényes módozatai.

A középkorban az érvényes módozatokat egy kis versikébe foglalták:

Barbara, Celarent primae, Darii Ferioque
Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundee
Tertia grande sonans recitas: Darapti, Felapton,
Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison, quertae sunt:
Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.[6]

A nagybetűvel kezdődő szavak magánhangzói a szillogizmusban szereplő ítéletek típusát jelölik. Pl. a Barbara következtetés ítéletei sorjában. A, A, A típusú ítéletek, a Celarent következtetés E, A, E. A verssorok elválasztják egymástól a négy alakzat következtetéseit. (A második és harmadik sor a harmadik alakzat következtetései.) Tehát az érvényes következtetések alakzatonként a következők:

I.

A	E	A	E	A	E
A	A	I	I	A	A
A	E	I	O	I	O

II.

E	A	E	A	E	A
A	E	I	O	A	E
E	E	O	O	O	O

III.

A	I	A	E	O	E
A	A	I	A	A	I
I	I	I	O	O	O

IV.

A	A	I	E	E	A
A	E	A	A	I	E
I	E	I	O	O	O

Arról, hogy ez a 24 alakzat valóban érvényes következtetést ad, könnyen meggyőződhetünk Euler-körökkel történő ábrázolás alapján. Van azonban más mód is a következtetések érvényességének ellenőrzésére. A 256 formailag lehetséges szillogizmusból megkapjuk a 24 érvényes szillogizmust, ha a következő három szabályt alkalmazzuk:

1. Ha a zárótételben tagadó ítélet van, az egyik és csak az egyik előzmény is tagadó.
2. Ha valamelyik terminus a zárótételben elosztott, az előzményben is elosztott.
3. A középső terminus legalább az egyik előzményben elosztott.

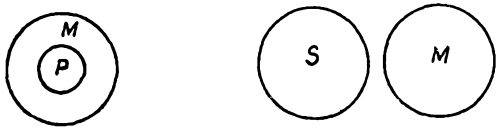
Vizsgáljunk meg néhány példát következtetések érvényességének igazolására:

Minden fém jól vezeti az elektromos áramot.
Egyetlen szigetelőanyag sem vezeti jól az elektromos áramot.
Tehát:
Egyetlen szigetelőanyag sem fém.

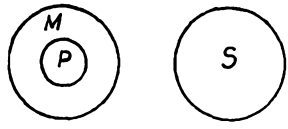
Ha a zárótétel alanyát (szigetelőanyag) *S*-sel, állítmányát (fém) *P*-vel, a középső terminust (elektromos áramot jól vezető) *M*-mel jelöljük, megkapjuk a következtetés logikai sémáját:

Minden *P*—*M*.
Egyetlen *S* sem *M*.
Tehát:
Egyetlen *S* sem *P*.

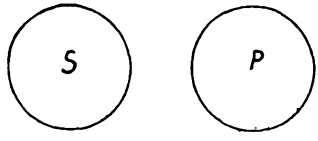
Rajzoljuk fel Euler-körökkel a következtetésben szereplő osztályviszonyokat:



Így a három osztály viszonya együtt:



Ezért valóban következik az előzményből a



viszony.

Vizsgáljuk meg ugyanezt a következtetést a szabályok alapján. Miután a következtetés képletét felírtuk, bebizonyosodott, hogy

kategorikus szillogizmus áll fenn. (Három terminus van, van középső terminus.) Ezután végigmehetünk a szabályokon:

1. A zárótétel tagadó ítélet, a kis premissza is az, tehát az egyes számú szabálynak megfelel.

2. A zárótétel egyetemes tagadó ítélet, ebben *S* is és *P* is elosztott, *S* elosztott az előzményben, mivel **E** típusú ítélet alanya, *P* elosztott az előzményben, mivel **A** típusú, ítélet alanya. A második szabály kielégül.

3. *M* a kis premisszában elosztott. A hármas számú szabály ellen sem vétettünk.

Tehát a következtetés érvényes szillogizmus.

Könnyen megállapítható körsémák segítségével a szillogizmus érvénytelensége is.

Például:

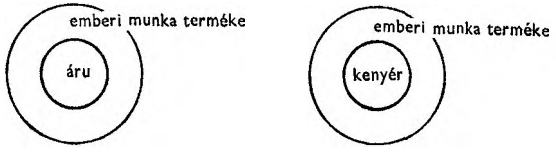
Minden áru emberi munka teméke.

Minden kenyér emberi munka terméke.

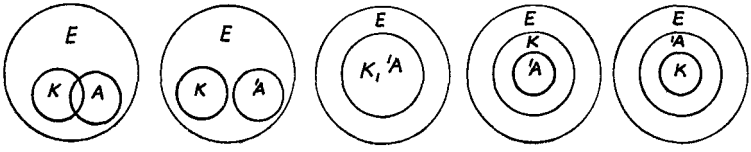
Tehát:

Minden kenyér áru.

Ábrázoljuk a premisszákat körsémával.



A két premisszából nem kapunk határozott útmutatást arra vonatkozóan, hogyan egyesítsük a két ábrát. Tehát nem lehet érvényes kategorikus szillogizmust levonni. Lehetséges egyesítési módok:



Vizsgáljuk meg, a fenti példa esetében kategorikus szillogizmus áll-e fenn, és ha igen, melyik szabály nem teljesült? A következtetés formalizálható kategorikus szillogizmusként:

Minden *P*—*M*.
Minden *S*—*M*.
Tehát:
Minden *S*—*P*.

1. A zárótétel állító — az első szabályt nem sértjük meg.

2. A zárótételben *S* elosztott, de az előzményben is az, tehát a második szabályt sem sértjük meg.

3. Az *M* állító ítéletek állítmánya, tehát nem elosztott egyik előzményben sem. A harmadik szabályt megsérti a következtetés.

A kategorikus szillogizmus módozatainak vizsgálatánál azt látjuk, hogy nem minden érvényes módozat igazolható közvetlenül az axiómákban kimondott osztályviszonyok alapján. Így pl.

Minden bálna vízben élő lény.
Minden bálna emlősállat.
Tehát:
Van olyan vízben élő lény, amely emlősállat.

Minden *M*—*P*.
Minden *M*—*S*.
Tehát:
Van olyan *S*, amely *P*

E szillogizmus érvényessége nem bizonyítható közvetlenül az axiómákból. Itt ugyanis a következő osztályviszonyok alapján következtetünk: Ha ismeretes, hogy a bálnák osztályának elemei a vízben élő lények osztályába tartoznak és az emlősállatok osztályába is beletartoznak, akkor van közös eleme az emlősállatok és a vízben élő lények osztályának. (Ugyanis legalább a bálnák közös elemei a két osztálynak.) Ennek a viszonylatnak a kapcsolatát az axiómákban kifejezett viszonyokhoz még külön igazolni kell, és csak ha ez az

igazolás sikerül, akkor mondható, hogy az axiómákból közvetve bizonyított következtetéssel van dolgunk.

Arisztotelész kidolgozta azokat az eljárásokat is, amelyekkel az összes érvényes következtetésben szereplő viszonylatok visszavezethetők azokra a viszonylatokra, amelyeket az axiómák közvetlenül igazolnak. Ezzel Arisztotelész kidolgozta a kategorikus szillogizmus formájában végzett következtetések deduktív axiomatikus rendszerét.[7]

A középkori logika már előbb említett versikéjének mássalhangzói azoknak az eljárásoknak a jelzései, amelyekkel a következtetés első alakzatos, az axiómával közvetlenül igazolható következtetéssé alakítható át. Így pl. a második alakzatban szereplő Cesare-nak axiómára való visszavezetése a következőképpen történik:

A C *e* s *a* r *e* formája: Egyetlen *P* sem *M*.
Minden *S*—*M*.
Tehát:
Egyetlen *S* sem *P*.

A Cesare *s* betűje azt jelöli, hogy az előtte levő ítéletben a megfordítás műveletét kell végrehajtani. Ha ezt elvégezzük, a következőket kapjuk:

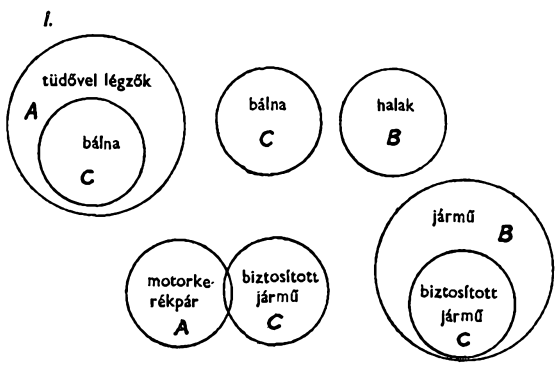
Egyetlen *M* sem *P*.
Minden *S*—*M*.
Tehát:
Egyetlen *S* sem *P*.

Ez viszont már olyan módozat (Celarent), amelynek érvényessége a kategorikus szillogizmus axiómáiból közvetlenül következik.

A Cesare visszavezetése Celarentre a visszavezetésnek igen egyszerű esetéhez tartozik. Más alakzatoknál az eljárás bonyolultabb, de az Arisztotelész által kidolgozott szabályokkal mindig elvégezhető.

Az arisztotelészi szillogisztika az első hibátlanul felépített axiomatikus rendszer, amelyről tudunk az emberiség történetében.

9. Ismert két fogalom, *A* és *B* terjedelmi viszonya egy harmadik fogalomhoz, *C*-hez. Megállapítható-e ennek alapján, hogy *A* fogalom milyen viszonyban van *B* fogalommal?



10. Írjuk fel a fenti viszonyoknak megfelelő szillogisztikus következtetésformákat.

11. Megfelelnek-e az alábbi következtetések a szillogizmus szabályainak?

a) Egyetlen hidra sem képes önálló helyváltoztatásra.
Minden hidra élőlény.
Tehát:
Van olyan élőlény, amely nem képes önálló helyváltoztatásra.

b) Minden négyzet paralelogramma.
Minden téglalap paralelogramma.
Tehát:
Minden téglalap négyzet.

12. Ellenőrizzük körsémákkal a fenti következtetések érvényességét.

13. Határozzuk meg az előzményeket és a zárótételt az alábbi következtetésekben:

a) Minden természetes szám valós, mert mindegyik racionális, a racionális számok pedig valósak.
b) Minden bűnös bűnhődik, aki ártatlan, nem bűnhődik, minthogy nem bűnös.
c) A négyzet szemközti oldalai párhuzamosak, mert a négyzet paralelogramma, s a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak.

14. Állapítsuk meg, fenti következtetések közül melyek az érvényesek, igazoljuk megállapításainkat körsémákkal és a szabályokkal.

1.5. AZ ARISZTOTELÉSZI SZILLOGISZTIKA ÉS AZ ISKOLÁS HAGYOMÁNYOS LOGIKA TORZÍTÁSAI

Említett munkájában J. Łukasiewicz az arisztotelészi logikát úgy határozza meg, mint az **A**, **E**, **I** és **O** viszonyok elméletét az általános terminusok szférájában.[8] Magát e rendszert értékelve a következőket mondja:

„Arisztotelész szillogisztikája olyan rendszer, amelynek szabatossága még a »klasszikus« matematikai elmélet szabatosságát is felülmúlja. De ez a rendszer *szűk* és nem alkalmazható a következtetések minden nemére, például számos matematikai érvelésre sem." „Arisztotelész nem felelős azért a tényért, hogy évszázadokon át az ő szillogisztikája, illetve inkább annak egy silány formája volt az egyedüli logika, amit a filozófusok ismertek."[9]

Łukasiewicz fenti sorai az ellen az iskolás logikai hagyomány ellen íródtak, amely, abszolutizálva a kategorikus ítéletformát, minden ítéletet mint *S—P* szerkezetű ítéletet értelmezett, ami egyben a valóságban meglevő összefüggések, viszonyok leszűkítését is jelentette.

Az arisztotelészi szillogisztika azon az ontológiai alapon épül fel, hogy a valóságban léteznek dolgok, és ezeknek a dolgoknak meghatározott tulajdonságaik vannak. Az arisztotelészi logika alapja a beletartozás (a bennfoglalás) viszonylata. Az **A**, **E**, **I**, **O** viszonyok nem korlátozódnak valamely valóság-területre, nem bizonyos dolgoknak, hanem minden dolognak sajátjai (minden dolognak van tulajdonsága, minden dolog a magábafoglalás viszonylatában áll más dolgokkal).

De a dolog és a tulajdonság közötti viszonylat nem meríti ki a valóság struktúráját. *Az arisztotelészi logika, noha fontos metszetben való leképezése a valóság struktúrájának, nem öleli fel a valóság szerkezetének teljességét*, önmagában egyoldalú képet ad a világról.

Logikai példával megvilágítva az elmondottakat, a következőkről van szó.

Mivel a dolgok bármely csoportjából képezhetünk osztályt, ezért minden ítélet felfogható úgy, mint amely osztályba tartozást, illetve osztályba nem-tartozást fejez ki. Például „Minden másodikos gyerek többet tud, mint bármely elsős gyerek" ítélet értelmezhető úgy, mint amely a „másodikos gyerekek" és az „elsős gyerekeknél többet tudók" osztálya közötti viszonyt állapít meg. Nevezetesen, azt a viszonyt, hogy a másodikos gyerekek bele tartoznak az elsős gyerekeknél többet tudók osztályába. Az ítélet ilyen interpretálása megfelelő, ha pl. az alábbi következtetésről van szó:

Minden másodikos gyerek többet tud, mint bármely elsős gyerek.
Minden gyerek, aki a „Bim-bam" kórus tagja, másodikos gyerek.
Tehát:
Minden gyerek, aki a „Bim-bam" kórus tagja, többet tud, mint bármely elsős gyerek.

De mi a helyzet akkor, ha a „Minden másodikos gyerek többet tud, mint bármely elsős gyerek" ítéletet a „Minden elsős gyerek többet tud, mint bármely óvodás" ítélettel kapcsoljuk össze. Le tudunk-e vonni e két ítéletből a kategorikus szillogizmus értelmében zárótételt?

Minden másodikos gyerek többet tud, mint bármely elsős gyerek.

Minden elsős gyerek többet tud, mint bármely óvodás.

Tehát: ?

A kategorikus szillogizmus értelmében itt nem adódik zárótétel, mivel nem három, hanem négy terminus szerepel:

Minden másodikos gyerek többet tud, mint az elsős gyerek.
Minden elsős gyerek többet tud, mint az óvodás.

Kategorikus szillogizmus alapján nem következik zárótétel az előzményekből, ugyanis nincs középfogalom, mivel a „többet tud, mint az elsős gyerek" és az „elsős gyerek" fogalmak egymástól különbözők.

A fenti két tételből mégis levonható zárótétel, de nem az **A, E, I, O** viszonyok alapján.

Minden másodikos gyerek többet tud, mint bármely óvodás.
Minden elsős gyerek többet tud, mint bármely óvodás.

Tehát:

Minden másodikos gyerek többet tud, mint bármely óvodás.

Következtetésünkben a zárótétel levonásához nem a kategorikus szillogizmus axiómáit használtuk fel, hanem más ismeretet. Ez az ismeret a „többet-tudás" reláció természetére vonatkozó ismeret. Megint másféle viszony természetének ismeretére van szükség ahhoz, hogy megállapítsuk, lehet-e az alábbi ítéletekből következtetést levonni:

Petőfi kortársa volt Vörösmartynak.
Vörösmarty kortársa volt Aranynak.

Következik-e ebből, hogy Petőfi és Arany kortársak voltak? A kérdést csak a „kortárs" viszonylat sajátosságának ismerete alapján lehet megválaszolni.

Vannak tehát a dolgok közötti viszonyoknak olyan sajátosságai is, amelyek eltérnek az **A, E, I, O** viszonyok sajátosságaitól. Ha, ezeket a sajátosságokat nem tanulmányozzuk, ha az **A, E, I, O** viszonyokat mint egyedül lehetséges viszonyokat értelmezzük, akkor megfosztjuk a logikát attól a lehetőségtől, hogy ténylegesen

létező összefüggések gazdag skálájának felismeréséhez nyújtson eszközt.

A kategorikus szillogizmus elméletének szűk kereteit felismerve, a modern logika olyan rendszereket dolgozott ki, amelyek alkalmasak a kategorikus ítéletekben feltárt viszonyoktól eltérő sajátosságú viszonyok logikai reprodukálására. Mielőtt e fejezetek ismertetésére rátérnénk, még egy kiegészítő megjegyzést teszünk a kategorikus szillogizmus iskolás hagyományos logikai tárgyalására vonatkozóan.

A hagyományos logikatankönyvek legtöbbjében megtalálható az alábbi következtetés példa:

Minden ember halandó.
Szókratész ember.
Tehát:
Szókratész halandó.

Ezt a következtetést a kategorikus szillogizmusra szokás példaként említeni. Valójában e példában nincs kategorikus szillogizmus. A kategorikus szillogizmusban ugyanis csak általános fogalmak szerepelnek, a fenti példában viszont a „Szókratész ember" ítélet alanya egy meghatározott egyed. Az ilyen ítéletet *egyedi ítéletnek* nevezzük. Az egyedi ítélet meghatározott egyednek osztályba való tartozását állapítja meg.

A fent említett következtetést tehát így formalizálhatjuk:

Minden M—P
„a" eleme M-nek
Tehát:
„a" eleme P-nek.

„a" ebben az esetben egy konkrét egyed, amelyről tudjuk, hogy valamely M osztály elemei közé tartozik. Ha ismert, hogy M osztály részosztálya a P osztálynak, akkor „a" eleme kell legyen a P osztálynak is.

Az egyedi ítéletet tartalmazó szillogisztikus következtetések érvényességének elemzéséhez felhasználhatók a kategorikus szillo-

gizmusra vonatkozó szabályok, mellettük bizonyos pótszabályok kimondására is szükség van. Ezek a következők:

1. A premisszák között nem lehet részleges ítélet.
2. Csak a kis premissza lehet egyedi ítélet.

GYAKORLATOK:

15. Állapítsuk meg, az alábbi ítéletek közül melyek egyedi ítéletek:

Egy atomháború pusztítóbb lenne, mint amilyen a II. világháború volt.
Aki tanácstag, a nép érdekeit kell hogy képviselje.
A tanácstag felszólalása érdekes volt.
A II. világháború sok szenvedést hozott az emberiségre.

16. Elemezzük az alábbi egyedi ítéletet tartalmazó következtetéseket logikai helyességük szempontjából:

Van olyan parlamenti képviselő, aki interpellációt nyújt be a parlamenti ülésen.
N. N. interpellációt nyújt be a parlamenti ülésen.
Tehát:
N. N. képviselő.

Egyetlen versenyló sem doppingolható.
Ráró versenyló.
Tehát:
Ráró nem doppingolható.

2. ÍTÉLETEK ÉS KÖVETKEZTETÉSEK FORMALIZÁLÁSA AZ OSZTÁLY-LOGIKA ESZKÖZEIVEL

2.1. S—P SZERKEZETŰ ÍTÉLETEK ÜRES OSZTÁLYOK LEHETŐSÉGÉNEK FELTÉTELEZÉSÉVEL

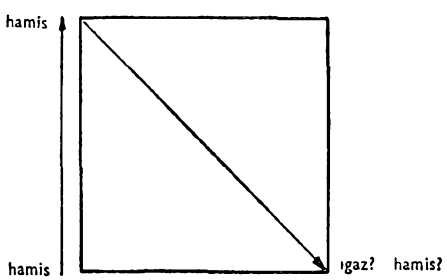
A kategorikus ítéletek meghatározásánál kikötöttük, hogy ez az ítélettípus olyan osztályok közötti viszonyt állít, amely osztályok mindegyikének van eleme, nem szerepelnek benne ún. üres osztályok.

Például a „Van olyan diák, aki szorgalmas" kategorikus ítéletben állítjuk, hogy *léteznek* diákok, és közöttük legalább egy olyan van, aki szorgalmas. Ha azt állítjuk, hogy „Van olyan diák, aki nem szorgalmas", ebben a kategorikus ítéletben szintén a diákok létezését állítjuk és azt, hogy legalább egy olyan diák létezik, aki nem szorgalmas. De a gondolkodás folyamatában gyakran használunk üres fogalmakat is, olyanokat, amelyek terjedelmébe egyetlen valóságos tárgy sem tartozik, ahol olyan osztályok szerepelnek, amelyeknek nincs elemük. Az olyan ítéletek, amelyek ugyan *S—P* szerkezetűek, de alanyuk vagy állítmányuk üres fogalom, nem elemezhetők az arisztotelészi szillogisztika keretei között. Az üres fogalmakat tartalmazó ítéletekkel végzett következtetések nem érvényes következtetések az arisztotelészi szillogisztikában.

Induljunk ki egy példából. Tudjuk, hogy az I típusú ítélet magában foglalja annak állítását, hogy *S* létezik, ezért „Van olyan boszorkány, akinek mágikus ereje van" ítélet nyilvánvalóan hamis I ítélet, hiszen boszorkányok nem léteznek.[10] De ha „Van olyan boszorkány, aki mágikus erővel rendelkezik" részleges állító (I típusú) ítélet hamis, ebből az ítéletek közötti viszonyok alapján következik, hogy az ítélet fölérendelt ítélete, a „Minden boszorkány mágikus erővel rendelkezik" ítélet szintén hamis. (Ha az alárendelt ítélet hamis, a fölérendelt ítélet nem lehet igaz.) És most jön a dolog neheze! Azt állapítottuk meg, hogy a „Minden boszorkány mági-

kus erővel rendelkezik" **A** típusú ítélet hamis. Gondoljunk vissza a logikai négyzetre! Ha **A** hamis, akkor **O** igaz. Ítéletünk **O** típusúra átfogalmazva így hangzik: „Van olyan boszorkány, aki nem rendelkezik mágikus erővel". Az ítéletek közötti viszonyok alapján ennek igaz ítéletnek kellene lenni. Azonban a „Van olyan boszorkány, aki nem rendelkezik mágikus erővel" ítélet hamis, ha azt vesszük figyelembe, hogy az **O** ítélet csak akkor igaz, ha *léteznek* boszorkányok. Ellentmondásra jutottunk! A logikai négyzet alapján azt az eredményt kaptuk, hogy a „Van olyan boszorkány, aki nem rendelkezik mágikus erővel" ítélet igaz. Más — szintén logikus — gondolatmenet alapján ítéletünknek hamisnak kellene lenni.

„Minden boszorkány
mágikus erővel rendelkezik."



Kiinduló ítélet:

Van olyan boszorkány, aki mágikus erővel rendelkezik

Van olyan boszorkány, aki nem rendelkezik mágikus erővel

Vagy vegyünk egy másik példát. Igaz ítélet a következő: „Egyetlen matematikus sem olyan ember, aki megoldotta a kör négyszögesítésének problémáját". Ebből az ítéletből megfordítással a következő ítéletet kapjuk:

„Egyetlen olyan ember, aki megoldotta a kör négyszögesítésének problémáját, sem matematikus".

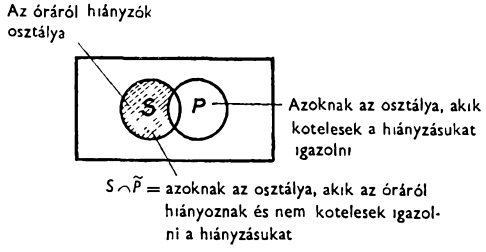
A logikai négyzet alapján a fenti **E** típusú ítélet igazságából következik az alábbi **O** ítélet igazsága.

„Van olyan ember, aki megoldotta a kör négyszögesítésének problémáját, és nem matematikus."

Ez az ítélet azonban tudvalevőleg hamis, ilyen ember nem létezik. Az ellentmondás keletkezésének oka itt az, hogy üres fogalmakra („boszorkány", „ember, aki megoldotta a kör négyszögesítésének problémáját") alkalmaztuk azokat a logikai műveleteket, amelyek csak nem-üres fogalmak esetén logikailag helyes eljárások.

A modern logika egyik fejezete, az osztályok logikája lehetőséget teremt olyan rendszer megalkotására, amelyben figyelembe tudjuk venni azt a körülményt is, hogy vannak üres fogalmak (vagyis olyan fogalmak, amelyeknek terjedelme üres osztály), és ezekkel ítéleteket, következtetéseket hajtunk végre.

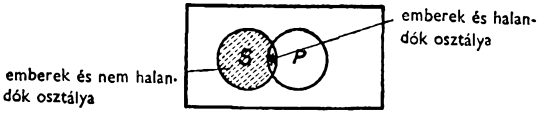
A beszéd folyamatában néha használjuk a „minden", „egyetlen" szavakat olyan mondatokban is, amelyekben nem fejezünk ki létezést. Például „Minden diák, aki hiányzik az óráról, igazolni tartozik hiányzását" ítélet nem állítja, hogy létezik olyan diák, aki hiányzik az óráról. (Természetesen azt sem állítja, hogy nem létezik olyan diák, aki hiányzik az óráról.) Az ítéletben azt állítjuk, hogy ha valaki hiányzik az óráról (ha van, vagy ha lesz ilyen), akkor igazolni tartozik hiányzását. Más nyelvi formában kifejezve: Nem lehetséges, hogy valaki hiányzik az óráról és nem tartozik igazolni a hiányzását. Itt tehát egy osztály ürességét állítjuk: nincs eleme az óráról hiányzók osztálya azon részosztályának, amelyik kívül esik a hiányzásukat igazolni kötelesek osztályán. Ábrázoljuk Venn-körökkel, melyik ez az osztály. Jelöljük szaggatott bevonalazással az üres osztályt:



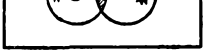
Állapodjunk meg abban, hogy az olyan ítéleteket, ahol azt állítjuk, hogy az S-ek P osztályon kívül eső része üres, a következő módon fogjuk jelölni. $S \cap \tilde{P} = o$. Az o itt az üres osztályt jelöli. Ez az ítélet természetesen nem állítja azt, hogy az S osztály egésze

nem üres. Erre vonatkozóan semmi információt nem közöl. Csak azt állítja, hogy ha léteznek S-ek, akkor ezek P osztályba tartoznak.

Hasonlítsuk össze a most elemzett $S \cap \tilde{P} = o$ ítéletet az A típusú kategorikus ítélettel. Például ha a „Minden ember halandó" mondat logikai formája A típusú kategorikus ítélet, akkor ez azt állítja, hogy az emberek osztályának elemei beletartoznak a halandók osztályába. Mint tudjuk, ez egyben azt jelenti, hogy „Egyetlen ember sem nem-halandó", vagyis ez az ítélet is tartalmazza az $S \cap \tilde{P}$ részosztály ürességének állítását, de még azt a többlet állítást is magában foglalja, hogy az S és P osztályok metszetének (az $S \cap P$ részosztálynak) van eleme. Ábrázoljuk ezt az ítéletet Venn-körökkel (x jelet helyezünk abba az osztályba, amelyikről tudjuk, hogy van eleme).



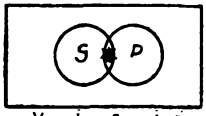
Mint a rajzon is látható, az **A** típusú kategorikus ítélet tartalmazza azt az állítást, amit az $S \cap \tilde{P} = o$ ítélet tartalmaz. Az $S \cap$ $\cap \tilde{P} = o$ ítéletet absztrakcióval kapjuk a „Minden S—P" kategorikus ítéletből, ha eltekintünk attól, hogy S-ek létezését feltételezzük. Hasonló módon az „Egyetlen S sem P" **E** típusú kategorikus ítéletből az S-ek létezésétől való elvonatkoztatással megkaphatjuk az $S \cap P = o$ ítéletet. Ez az ítélet azt állítja, hogy *ha* létezik S, akkor ez nem részosztálya P-nek.



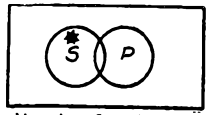
Egyetlen S sem P

$S \cap P = O$

Ábrázoljuk most Venn-körökkel az **I** és az **O** típusú kategorikus ítéleteket:

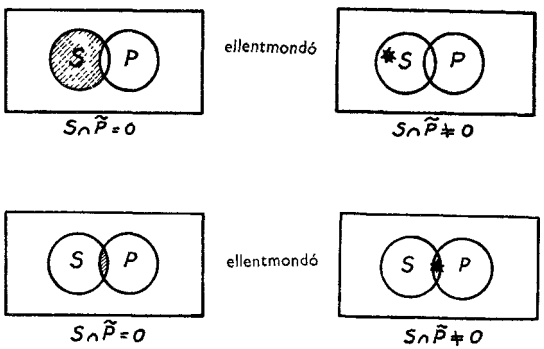


Van olyan S, amely P



Van olyan S amely nem P

Jelöljük az **I** típusú ítéletet $S \cap P \neq o$ (S és P nem egyenlő üressel) jellel, az **O** típusú ítéletet $S \cap \tilde{P} \neq o$ (S és $\tilde{P}$ nem egyenlő üressel). A rajz alapján könnyen belátható, hogy az $S \cap \tilde{P} = o$, valamint az $S \cap \tilde{P} \neq o$ ítéletek között ellentmondási viszony áll fenn. Továbbá ellentmondási viszony van $S \cap P = o$ ítélet és az $S \cap P \neq o$ ítéletek között.

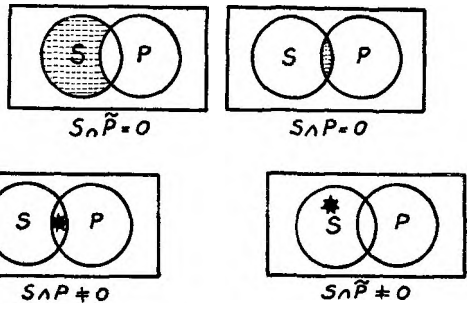


Foglaljuk össze, milyen eredményre jutottunk. Az **A** és **E** típusú ítéletekből — absztrahálva az S-ek létezésének állításától — üres osztályokról való állítást tartalmazó ítéleteket kapunk. Így kapjuk az „S osztály elemei beletartoznak a P osztályba" állításból (Minden S—P) a „Nem igaz, hogy S osztálynak van olyan eleme, amely a $\tilde{P}$ osztálynak is eleme" ($S \cap \tilde{P} = o$) állítást.

Továbbá az „S osztály elemei olyan elemek, amelyek nem tartoznak a P osztályba" állításból annak állítását, hogy az S és a P osztályok metszete üres. ($S \cap P = o$)

Ezzel megkaptuk az osztály-logika eszközeivel felírva az S—P szerkezetű ítéletek négy típusát. A kategorikus ítéleteknek ez az átértelmezése, amellyel megismerkedtünk, Boole angol logikustól származik. Boole az egyetemes ítéleteknél eltekint a létezés feltételezésétől, a részleges ítéleteknél viszont feltételezi, hogy az osztá-

lyok nem üresek. A négy *S—P* szerkezetű ítélet osztály-logikai értelmezésben tehát a következő:

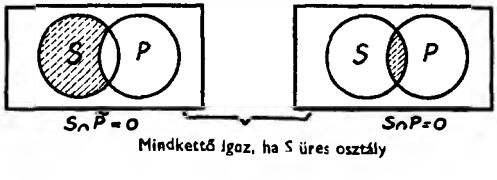


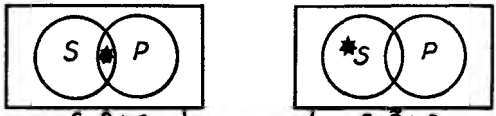
Az **A** és **E** ítéletből ilyen absztrakcióval nyert ítéletek ellentmondási viszonyban vannak az **I** és az **O** ítéletekkel, akkor is, ha feltételezzük, hogy *S* üres osztály.

Ha *S* üres, hamis az $S \cap P \neq o$ ítélet, de
igaz az $S \cap P = o$ ítélet.
Ha *S* üres, hamis az $S \cap \tilde{P} \neq o$ ítélet, de
igaz az $S \cap \tilde{P} = o$ ítélet.

Ennyiben foglalhatjuk össze eddigi eredményeinket. Meg kell azonban állapítanunk, hogy az **A** és **E** ítéletek átértelmezésével kapott ítéletekkel csak az ellentmondási viszonyt mentettük meg!

Ha feltételezzük üres osztályok létezését, az $S \cap \tilde{P} = o$ és az $S \cap P = o$ ítéletek lehetnek egyszerre igazak (nem úgy, mint a „Minden *S—P*" és „Egyetlen *S* sem *P*" ítéletek, amelyek tudvalevően ellentétesek), viszont az $SP \neq o$ és az $SP \neq o$ ítéletek lehetnek egyszerre hamisak, nevezetesen akkor, amikor *S* üres osztály (nem úgy mint a „Van olyan *S*, amely *P*" és a „Van olyan *S*, amely nem-*P*" kategorikus ítéletek, amelyek alárendelt ellentétesek).





Mindkettő *hamis*, ha S üres osztály

Felvethetné valaki, melyik írja le pontosabban a valóságos emberi gondolkodást? Melyik van közelebb az élő nyelvekben kifejeződő logikához? A kérdés ilyen felvetése azonban helytelen lenne.

A különböző logikai rendszerek más és más absztrakciós szinten, más és más oldaláról írják le az emberi gondolkodást.[11] A különböző rendszerek a maguk kiinduló alapja mellett kell hogy ellentmondásmentesek legyenek, hogy ne tartalmazzanak egymásnak ellentmondó kijelentéseket. E rendszerek együttese képes csak átfogni az élő, eleven gondolkodás gazdagságát.

2.2. A KATEGORIKUS SZILLOGIZMUS ELEMZÉSE, ÉRTELMÉNEK KITERJESZTÉSE AZ OSZTÁLY-LOGIKÁBAN

Az arisztotelészi kategorikus szillogizmus 24 érvényes módozata közül 20 minden nehézség nélkül igazolható az osztály-logika eszközeivel. Az alábbiakban a Venn-körökkel való igazolási módot fogjuk ismertetni.

Vegyük példának a „Barbara" módozatot:

Minden M—P.
Minden S—M.
Tehát:
Minden S—P.

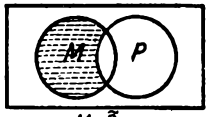
Az osztály-logika eszközeivel formalizálva:

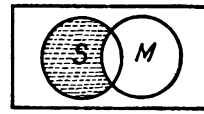
$$M \cap \tilde{P} = o$$
$$S \cap \tilde{M} = o$$

Tehát:

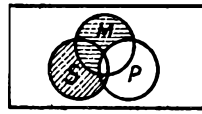
$$S \cap \tilde{P} = o$$

Ábrázoljuk az alakzatban szereplő premisszákat Venn-körökkel:

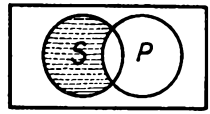




Ha a fenti két ábrát egy rajzban egyesítjük, a következőt kapjuk:



Erről az ábráról leolvasható az $S \cap \tilde{P} = o$ zárótétel:



Ezzel a „Barbara" következtetés érvényességét igazoltuk.

Következő példánk a részleges ítéleteket is tartalmazó „Darii" módozat:

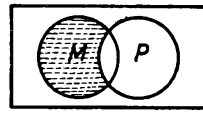
Minden M—P.
Némely S—M.
Tehát:
Némely S—P.

Az osztály-logikában:

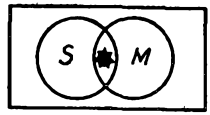
$$M \cap \tilde{P} = o.$$
$$S \cap M \neq o.$$
$$\text{Tehát: } S \cap P \neq o.$$

Venn-körökkel ábrázolva:

$M \cap \tilde{P} = o$

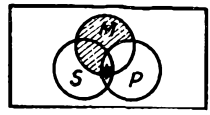


$S \cap M \neq o$



A két rajzot egyesítve leolvasható a zárótétel:

$S \cap P \neq o$



Lássunk egy példát valamely érvénytelen kategorikus szillogizmusra.

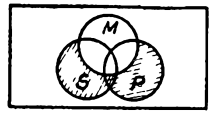
Tanultuk, hogy az alábbi következtetés nem elégíti ki a kategorikus szillogizmus szabályait:

Minden áru emberi munka terméke.
Minden kenyér emberi munka terméke.
Tehát:
Minden kenyér áru.

Formalizáljuk az osztály-logika eszközeivel a premisszákat:

$$P \cap \tilde{M} = o$$
$$S \cap \tilde{M} = o$$

Ábrázoljuk a premisszák együttesét Venn-körökkel:



A rajzról leolvasható, hogy az előzményeknek nem következménye $S \cap \tilde{P} = o$. Ugyanis van S és M osztályok metszetének olyan része, amelyik nincs bevonalkázva, vagyis amelyiknek ürességéről nem nyertünk információt.

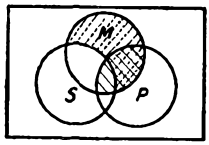
Az osztály-logika eszközeivel bizonyítható a kategorikus szillogizmusban nem érvényes következtetések érvénytelensége.

A fentiekben azt állítottuk, hogy az érvényes 24 módozat közül csak 20 módozat érvényessége bizonyítható az osztály-logikában. Mi a helyzet a fennmaradó néggyel, a „Darapti", „Felapton" (III. alakzat), „Bramantip", „Fesapo" (IV. alakzat) következtetésekkel?

Induljunk ki példaként a „Fesapo"-ból.

Egyetlen M sem P	$M \cap P = o$
Minden M—S	$M \cap \tilde{S} = o$
Tehát:	
Némely S nem P	$S \cap \tilde{P} \neq o$

Ábrázoljuk a premisszák együttesét Venn-körökkel:



Mint látható, a premisszák együttese nem bizonyítja $S \cap \tilde{P} \neq o$ ítéletet.

A kategorikus szillogizmus fenti négy alakzata csak akkor igazolható az osztály-logika eszközeivel, ha pótpremisszaként felvesszük azt az ítéletet, amely kimondja S létezését. Ha ugyanis a premisszákban egyetemes ítéletek szerepelnek (amelyek tudvalevőleg akkor is igazak lehetnek, ha S, illetve P üres osztály), nincs jogunk létezést kimondó (vagyis részleges) ítéletekre következtetni. Ez azt jelenti, hogy az osztály-logika rámutat arra, hogy az egyetemes ítéletek esetében (mielőtt velük következtetést végeznénk létezést kimondó ítéletekre), meg kell győződnünk arról, üres terminusokkal van-e dolgunk vagy sem. Erről meggyőződni (ha csak nem logikailag üres osztályokról van szó) csak a logikán kívüli eszközökkel tudunk. E tények ismét arra hívják fel figyelmünket, hogy a logika adott rendszerei csak bizonyos megismerési feladatokhoz adnak segítséget, de egyetlen rendszer sem „mindentudó".

Most még néhány szót arról, mennyiben szélesíti ki logikai ismereteinket a modern osztály-logika az arisztotelészi szillogisztikához viszonyítva.

A döntő lépés feltétlenül az üres osztályok figyelembevétele volt. Emellett sikeres kísérletek történtek az arisztotelészi szillogisztika kiterjesztésére négy, illetve ennél több terminus esetében.[12]

Érdekessége miatt egy példát bemutatunk:[13]

Minden filozófia szakos egyetemi hallgató tanul logikát.

Minden matematika szakos egyetemi hallgató tanul fizikát.

Tehát:

Ha van olyan filozófia szakos, aki matematika szakos, akkor van olyan logikát tanuló, aki tanul matematikát.

Képletben:

Minden A—B.

Minden C—D.

Tehát:

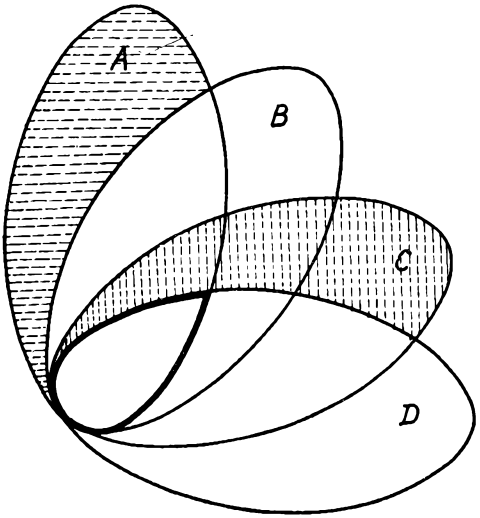
Ha van olyan A, amely C, akkor van olyan B, amely D.

$$A \cap \tilde{B} = o$$
$$C \cap \tilde{D} = o$$

Tehát:

$$(A \cap C \neq o) \rightarrow (B \cap D \neq o)$$

Venn-körökkel ábrázolva:



A rajzon látható, hogy A és C metszetének az a része, amelyről nem tudjuk, hogy üres, B-nek és D-nek is részhalmaza.

Az általunk ismertetett Venn-körökkel való eldöntési eljárás, csak az egyik (nem is a legfejlettebb) módja a következtetések osztály-logikai elemzésének. Az osztály-logikának a kijelentések logikájával való egyesítésével olyan rendszert kapunk, amely rendszerben, tisztán mechanikus úton, formuláknak és formális szabályoknak a felhasználásával kiszámítható bármely $S—P$ szerkezetű ítéletekből álló formuláról, hogy érvényes következtetés formulája-e vagy sem. Másként kifejezve, az osztály-logika kalkulusként való felépítésével és ennek a kijelentéskalkulussal való egyesítésével olyan kalkulusrendszert kapunk, amellyel bármely $S—P$ szerkezetű ítéleteken alapuló következtetés érvényessége eldönthető. Az osztály-logika kalkulusszerű felépítésével e könyv keretei között nem foglalkozunk.

GYAKORLATOK:

17. Vizsgáljuk meg, hogy az átalakítás, a megfordítás esetei közül melyek igazolhatók Venn-diagrammal, melyek azok, amelyek csak a létezés feltételezésével érvényesek.

3. A PREDIKÁTUMOK LOGIKÁJA

A predikátumok logikája a logikának az a fejezete, amely egységes rendszerben elemzi az ítéletek finomszerkezetét, az ítéletek finomszerkezetén felépülő következtetéseket.

Az arisztotelészi szillogisztikát tárgyalva rámutattunk arra, hogy ez a rendszer az egyszerű ítéleteknek csak egy meghatározott csoportját, és az ezekkel végzett következtetéseket tartalmazza. Az osztály-logika már kiszélesíti az elemzési lehetőségeket, de, mint láttuk, ez is csak az $S—P$ szerkezetű ítéletek logikájával foglalkozik. Az egyszerű ítéletek körébe az $S—P$ szerkezetű ítéleteken kívül olyan ítéletek is tartoznak, amelyekben egynél több alany kapcsolódik egy állítmányhoz. Ezeket az ítéleteket *relációs* ítéleteknek

nevezzük. A predikátumlogika eszközeivel egységes rendszerben tanulmányozhatók az egy alanyú és a több alanyú ítéletek, az ezeken felépülő következtetések. Mielőtt a predikátumlogika tényleges tárgyalásába kezdenénk, néhány szót kell szólnunk a relációs, vagyis a több alanyú ítéletekről, az ezekben szereplő viszonyok természetéről.

3.1. RELÁCIÓS ÍTÉLETEK

Bizonyos értelemben minden egyszerű ítélet relációs ítélet. Kifejeznek egyfajta relációt a kategorikus ítéletek is. Az ítélet alanyát és az ítélet állítmányát képező osztályok közötti relációt, a „beletartozás", illetve a „bele nem tartozás" relációját fejezik ki két osztály között. Vannak azonban olyan egyszerű ítéletek, amelyek nem „osztályba tartozást", illetve „osztályba nem tartozást" fejeznek ki. Ezeket nevezzük relációs ítéleteknek. Így pl. relációs ítéletek a következők:

Júlia szereti Rómeót.
A Gellérthegy alacsonyabb, mint a Kékes.
Minden páros szám után következik valamely páratlan szám.
Kecskemét Szeged és Budapest között terül el.

A relációs ítéletek felosztása különböző szempontok alapján történhet.

Megkülönböztethetünk két, három, négy stb. alanyú ítéleteket. Például „Júlia szereti Rómeót" ítélet két alanya: Júlia, Rómeó. Az ítélet állítmánya a szeretet viszonylata. „Kecskemét Szeged és Budapest között terül el" ítélet három alanyú ítélet (Kecskemét, Szeged, Budapest), az ítélet állítmánya a valami között elhelyezkedés viszonylata.

A relációs ítéletek alanyai lehetnek meghatározott individuumok és lehetnek olyan egyedek, amelyekről mint adott osztály bizonyos elemeiről gondolkodunk. Az állítás vonatkozhat valamely általános fogalom terjedelmébe tartozó minden egyedre vagy a fogalomban általánosított egyedeknek csak egy részére.

Például:

„Júlia szereti Rómeót" ítélet alanyai meghatározott individuumok.

A „Bodri egyetlen macskát sem szeret" ítéletben meghatározott egyed (Bodri) és a macskák osztályának minden egyes egyede közötti relációt állítunk.

A „Van olyan kutya, amelyik egyetlen macskát sem szeret" ítéletben az állítás a kutyák osztályának bizonyos elemeire, a macskák osztályának viszont minden elemére vonatkozik.

A relációs ítéleteket csoportosíthatjuk az ítéletben állított reláció sajátosságai szerint is. E sajátosságok különbözősége alapján a relációs ítéletekkel végzett következtetések érvényességének más-más feltételei vannak. Az alábbiakban megemlítjük a relációk néhány típusát.

Szimmetrikus valamely reláció akkor, ha a reláció alanyai felcserélhetők egymással. Vagyis ha *A*-nak *B*-vel való relációja maga után vonja, hogy *B* az *A*-val ugyanezen relációban van. Szimmetrikus pl. az azonosság reláció. Ugyanis ha *A* azonos *B*-vel, akkor *B* is azonos *A*-val.

Aszimmetrikus reláció az, ahol *A*-nak *B*-vel való relációja maga után vonja, hogy *B*-nek *A*-val nem lehet ugyanezen relációja. Pl. aszimmetrikus a „magasabb mint" reláció.

Pl. Aladár magasabb, mint Béla.
Tehát:
Béla nem magasabb, mint Aladár.

Nem-szimmetrikus reláció esetén *A*-nak *B*-vel való relációjából nem lehet következtetni *B*-nek *A*-val való viszonyára. *B* lehet ugyanezen relációban *A*-val, de az is lehetséges, hogy *B* nem áll ebben a relációban *A*-val. Ilyen reláció pl. a szeretet. Abból, hogy Otello szereti Desdemonát, nem következik, hogy Desdemona szereti Otellót.

Tranzitív a reláció, ha *A*-nak *B*-vel és *B*-nek *C*-vel való ugyanazon viszonyából következik, hogy *A* és *C* között is fennáll e viszonylat. Tranzitív pl. a „nagyobb", a „többet tudás" is.

Minden másodikos többet tud, mint bármely elsős.
Minden elsős többet tud, mint bármely óvodás.
Tehát:
Minden másodikos többet tud, mint bármely óvodás.

E példában a zárótétel levonásához éppen a viszonylat tranzitivitásának ismeretét használtuk fel.

Intranzitív a reláció, ha *A*-nak *B*-vel és *B*-nek *C*-vel való azonos relációja esetén *A* nem állhat *C*-vel ezen relációban. Ilyen pl. a „valakinek az apja" reláció:

Péter apja Pál.
Pál apja János.
Tehát:
Péter apja nem János.

Nem-tranzitív a reláció, ha *A*-nak *B*-vel és *B*-nek *C*-vel való azonos viszonya esetén *A* és *C* között fennállhat, de az is lehetséges, hogy közöttük nem áll fenn a viszonylat. Ilyen a „kortárs" viszonylat.

Petőfi kortársa volt Vörösmartynak
Vörösmarty kortársa volt Aranynak
premisszákból nem lehet levonni azt a zárótételt, hogy
Petőfi és Arany kortársak voltak.

Érdemes néhány példán megvizsgálni, milyen természetű relációk szerepelnek az *S*—*P* szerkezetű ítéletekben és a velük végzett következtetésekben.

Például a „Minden *S*—*P*" ítélet nem-szimmetrikus reláció. Hiszen lehet, hogy minden *P*—*S*, de az is lehet, hogy nem minden *P*—*S*. Szimmetrikus reláció van az „Egyetlen *S* sem *P*" ítéletben. A kategorikus szillogizmusban felhasználjuk a tranzitivitás relációját. Világosan látható ez pl. a „Barbara"-nál, ha a premisszák sorrendjét felcseréljük.

Minden *S*—*M*.
Minden *M*—*P*.
Tehát:
Minden *S*—*M*.

GYAKORLATOK:

18. Állapítsuk meg, hogy az alábbi ítéletek közül melyek relációs ítéletek.

Péter és Mária tanulnak.
Péter tanul Máriával.
Minden alap meghatározza a maga felépítményét.
Aki a virágot szereti, rossz ember nem lehet.

19. Csoportosítsuk az alanyok száma szerint az alábbi ítéleteket.

Aki másnak vermet ás, maga esik bele.
Nem lehet szabad az a nép, amely más népeket elnyom.
Kétszer kettő egyenlő néggyel.
Otelló féltékeny Desdemonára.

20. Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat szimmetria és tranzitivitás szempontjából:

különbözés
testvér
idősebb mint

21. Milyen közös reláció szerepel az alábbi három közmondásban:

Ki mint veti ágyát, úgy alussza álmát.
Ki mint vet, úgy arat.
Egyik tizenkilenc, a másik egy híján húsz.

22. Állapítsuk meg, hogy az alábbi következtetésekben milyen relációk mely sajátosságai kerülnek felhasználásra:

Némely S—P
Tehát: Némely P—S

Ha p, akkor q
Ha q, akkor r
Tehát: Ha p, akkor r

p vagy q
Tehát: q vagy p

23. Helyesen ismerték-e fel az adott reláció természetét az alábbi következtetéseknél?

Mária látja Pétert.
Tehát:
Péter látja Máriát.

Minden egyetemi hallgató, aki megérti a logika tananyagot, képes azt megtanulni.
Minden egyetemi hallgató, aki képes megtanulni a logika tananyagot, képes sikeres vizsgát tenni logikából.
Tehát:
Minden egyetemi hallgató, aki képes megérteni a logika tananyagot, képes sikeres vizsgát tenni logikából.

3.2. AZ EGYSZERŰ ÍTÉLETEK FORMALIZÁLÁSA A PREDIKÁTUMKALKULUSBAN[14]

A predikátumkalkulus abból kiindulva, hogy az egyszerű ítéletekben az ítélet igazsága attól függ, hogy mely dolgokról állítjuk az állítmányt, az egyszerű ítéleteket függvény módjára értelmezi. (Például szép, hasznos, egyetemi hallgató stb. állítmányokkal képzett ítéletek igazsága attól függ, hogy mely dolgokról állítjuk ezen predikátumokat.)

A predikátumkalkulus bevezeti a *logikai függvény* fogalmát. A matematika a függvény fogalmát annak vizsgálatára vezette be, hogy hogyan függ egy mennyiség más mennyiségektől. (A függvényen belül azt, ami függ, *függő változónak*, amitől függ, azt *független változónak* nevezzük.) Később kiterjesztették a függvény fogalmát *nem mennyiségek* közötti függőségi viszony eseteire is. Például hogyan függ egy görbe vonal hossza a vonal alakjától. A mai matematika függvényfogalmához a halmazelméleten keresztül vezet az út.

A halmazelméletben már szükség van tetszőleges dolgok egymástól való függésmódjának vizsgálatára. Ilyen értelemben függvény az, ami valamely I halmazon van értelmezve, értékei F halmaznak elemei. (Azt a halmazt, amelyen a független változó értékei futnak át, tehát azon dolgok halmazát, amelyektől való függést vizsgáljuk, a függvény *értelmezési tartományának* nevezzük. Azt a halmazt, amelyen a függő változó értékei áthaladnak, a függvény *értékkészletének* nevezzük.) Így pl. függvény az is, hogy hogyan függ a gázok térfogata a nyomásuktól, valakinek a kedélyállapota az időjárástól, az áruk ára a kereslettől stb.

A logikai függvény fogalma az általános függvényfogalom egy speciális esete. Logikai függvénynek az olyan függvényt nevezzük, amely valamely I halmazon van értelmezve, értékei pedig logikai értékek (igaz vagy hamis). Ezek a függvények azt adják meg, hogy hogyan függ valamely ítélet igaz volta attól, hogy miről (milyen alanyokról) állítjuk az állítmányt.

A logikai függvényeket a matematikában alkalmazott jelölésmódhoz hasonlóan jelöljük. A predikátum (a függő változó) jelölésére pl. $P(\ )$ jelet használunk. Az üres helyre annak a dolognak a megnevezése kerül, amelyről az állítás történik. Például jelölje $P(\ )$ predikátum a „prímszám"-ot és helyezzük az üres helyre az „5"-öt. $P(5)$ tehát olyan ítélet jelölése, ahol az ítélet logikai alanya „5", állítmánya „prímszám". Mivel „5" valójában rendelkezik a „prímszám" sajátosságával, az ítélet logikai értéke igaz. Ennek megfelelően $P(4)$ ítélet értéke hamis, mivel a négy nem prímszám.

Ha a függvényben az üres helyre nem individuum, hanem változó jelét helyezzük, ún. *nyitott formulát* kapunk. Ha pl. $D(\ )$-ben az üres helyre x változót helyezzük, a $D(x)$ nyitott formulát kapjuk. A nyitott formulákban szereplő változókat *szabad változóknak* nevezzük. Ha $D(x)$-ben a predikátum „diák" (vagyis $D(x) =$ $=$ „x diák"), a függvény akkor veszi fel az igaz értéket, ha x valóban diák, minden más esetben a függvény értéke hamis.

A $D(x)$, $F(y)$, $G(z)$ formulák önmagukban nem ítéletek jelei, de azzá válnak, ha a bennük szereplő változók (x, y, z) helyébe individuumok neveit helyettesítjük. Például ha „x diák" függvényben x helyébe Pétert helyettesítünk, a „Péter diák" ítéletet kapjuk.

Valamely predikátum függhet egy alanytól, de vannak olyan predikátumok, amelyek több alanytól (dologtól) függnek. Így pl. $F(x)$ esetében a predikátum egy változótól x-től függ, $G(x, y)$-nél a predikátum két változótól, x-től és y-tól függ. Az egyváltozós predikátumú formulák S—P szerkezetű ítéletek formulái. A többváltozós predikátumú formulák kettőnél több alany viszonyát állítják, ezek *relációs ítéletek* formulái.

Lássunk példákat relációs ítéleteknek megfelelő predikátumkalkulusbeli formulákra.

Ha a szomszédság viszonyát $SZ(x, y)$ függvénnyel ábrázoljuk, akkor SZ(Péter, Pál) a „Péter és Pál szomszédok" ítélet jelölésére szolgál. Általánosan az $SZ(x, y)$ formula akkor veszi fel az igaz értéket, ha x és y valóban szomszédok, ellenkező esetben hamis. Ha $K(x, y, z)$ nyílt formula azt jelöli, hogy „y, x és z között fekszik", akkor ha y = Kecskemét, x = Budapest, z = Szeged, a „Kecskemét Budapest és Szeged között fekszik" igaz ítéletet kapjuk.

Mindazok a művelet ek, a negáció, konjunkció, diszjunkció stb., amelyeket az ítéletek durvaszerkezetének logikájában megismertünk, érvényesek a predikátumkalkulusban is.

Így pl. $F(x)$-ből a negáció műveletének alkalmazásával $\overline{F(x)}$ lesz. $\overline{F(x)}$ a hamis értéket veszi fel, ha $F(x)$ értéke igaz, és igaz értéket vesz fel, ha $F(x)$ értéke hamis.

$F(x)$ és $G(x)$ konjunkciója: $F(x) \wedge G(x)$. A konjunkció igaz, ha $F(x)$ és (Gx) értéke is igaz, minden más esetben hamis.

A predikátumkalkulus a kijelentéskalkulusban alkalmazott műveleteken kívül más logikai műveleteket is alkalmaz. Ilyen speciálisan predikátumkalkulusbeli művelet a kvantifikálás. A kvantifikálás műveletével nyitott formulákból ítéleteket kapunk anélkül, hogy a formulákban szereplő változók helyébe individuumokat helyeznénk. Ennek megértésére forduljunk analógiaként az algebrához. Az algebrában nem tehetjük fel azt a kérdést, igaz-e a $x^2+6 = 5x$ összefüggés. Az $x^2+6 = 5x$ igazságának kérdése nyitott, igazsága annak függvénye, hogy mit helyezünk x helyébe. Így pl. ha $x=2$, akkor igaz ítéletet kapunk, de x-et 5-tel helyettesítve az ítélet hamis. Ezzel szemben az $x+y = y+x$ olyan egyenlőség, amelyről önmagában — tehát anélkül, hogy x, y konkrét értékét ismernénk —

megválaszolható, hogy igaz-e, vagy hamis: $x+y = y+x$ igaz ítélet. Ha bármely két számmal helyettesítjük x-et és y-t, igaz lesz a fenti egyenlőség. Ezt az összefüggést a következő módon is kifejezhetjük:

Minden x-re és minden y-ra áll a számok individuumtartományában, hogy $x+y = y+x$.

Térjünk most vissza a predikátumkalkulus területére. $Z(x) =$ = „x jó vezető" nyitott formuláról önmagában nem állíthatjuk sem azt, hogy igaz, sem azt, hogy hamis. Igazsága attól függ, hogy x helyébe mit helyezünk, ha $x =$ réztárgy, akkor $Z(x)$ az igaz értéket veszi fel, ha $x =$ növény, akkor $Z(x)$ a hamis értéket veszi fel.

Ezzel szemben, ha azt állítjuk, hogy „Minden x-re áll a fémek individuumtartományában, hogy $Z(x)$", akkor ez már ítélet, amelyről megállapítható az igazságértéke.

Fentiekhez hasonlóan a $D(x) =$ „x diák" nyitott formula igazsága attól függ, mely individuumot helyezzük x helyébe, de ha azt állítjuk, hogy

„*Van olyan* x az emberek individuumtartományában, hogy $D(x)$", akkor már zárt formulát, ítéletet kaptunk, amelyről eldönthető igazsága.

Azokat az eljárásokat, amelyekkel a fenti esetekben nyitott formulából ítéletet kaptunk, kvantifikálásnak nevezzük. Másképpen megfogalmazva, az ilyen esetekben a nyitott formulákban előforduló változók kvantorral történő lekötésével jutunk ítélethez. (Azt a változót, amelyre a kvantifikálás műveletét alkalmaztuk, *kötött változónak* nevezzük. Az olyan formulát, amelyben minden változó kötött, *zárt formulának* nevezzük.)

Általános kvantifikációnak nevezzük, ha $F(x)$-en olyan logikai műveletet hajtunk végre, amelynek eredményeként kapott ítélet akkor igaz, ha a függvény értelmezési tartományában *minden* x-re (minden individuumra) érvényes az ítéletben állított predikátum. Az általános kvantor jele a függvény elé helyezett $\forall$-jel, mellette zárójelben az a jel szerepel, amellyel a megfelelő független változót jelöltük.

Például $J(x)$-ből általános kvantifikáció útján $\forall(x)J(x)$ formulát kapjuk.

Ha $J(x) =$ „x játékos",

akkor $\forall(x)\, J(x)$ igaz, ha minden „x" játékos.

Egzisztenciális kvantifikációnak nevezzük, ha $F(x)$-en olyan logikai műveletet hajtunk végre, amelynek eredményeként kapott ítélet akkor igaz, ha a függvény értelmezési tartományában van olyan individuum (van olyan x), amely rendelkezik az ítélet predikátumával. Az egzisztenciális kvantor jele: $\exists$, mellette zárójelben annak a változónak a jelével, amelyre a kvantifikálás művelete vonatkozik.

Például ha $Sz(x)$ = „x szorgalmas",
akkor $\exists(x)\ Sz(x)$ akkor igaz, ha létezik olyan „x", aki szorgalmas.

Szokás külön megjelölni a függvény értelmezési tartományát, tehát azoknak a dolgoknak a halmazát, amelyektől való függést vizsgáljuk (azt az individuumtartományt, amelyen a függvény független változója — [fenti esetben x] — fut át). Ugyanis, ha az értelmezési tartomány nincs megjelölve, x helyébe bármely dolog behelyettesíthető, és a $\forall(x)\ Z(x)$ függvény csak akkor igaz, ha bármely individuumtartomány bármely x dolgára nézve igaz, hogy rendelkezik a Z predikátummal. Az értelmezési tartomány megjelölésével a „Minden fém jó vezető" ítélet formalizálása:

$$\forall(x)_{\mathcal{F}}\ Z(x) \quad Z(x) = x \text{ jó vezető}$$
$$\mathcal{F} = \text{fémek halmaza}$$

Bizonyos esetekben szükség van arra, hogy pl. a „Minden fém jó vezető" ítéletet a „fémek" individuumtartományánál nagyobb számosságú, a fémek halmazát magába foglaló $\mathcal{J}$ halmazon is értelmezni tudjuk. Erre megvan a lehetőség. Ebben az esetben azt a tényt kell kifejeznünk, hogy ha x (az adott $\mathcal{J}$ halmaz valamely individuuma) a fémek halmazába (amely az $\mathcal{J}$ halmaz egy részhalmaza) tartozik, akkor beletartozik a jó vezetők halmazába is. Tehát a „Minden fém jó vezető" ítéletet megfeleltetjük a következő ítéletnek. „Minden x-re (amely az $\mathcal{J}$ halmaz eleme) áll, hogy ha x fém, akkor x jó vezető". Formulában kifejezve:

$$\forall(x)_{\mathcal{J}}\ [F(x) \rightarrow Z(x)]^{15}$$
$$F(x) = x \text{ fém}$$
$$Z(x) = x \text{ jó vezető}$$

Az egyetemes állító ítélet formalizálásánál alkalmazott módszerből kiindulva az egyetemes tagadó ítélettípusnak megfelelő formulát is felírhatjuk a predikátumkalkulus eszközeivel.

Pl: Egyetlen fém sem szigetelő

$$\forall(x)\ (\mathcal{F}\ \overline{Sz(x)})$$
$$Sz(x) = x \text{ szigetelő}$$
$$\mathcal{F} = \text{fémek halmaza}$$

(Minden x-re áll a fémek halmazában, hogy nincs meg x-nek a „szigetelő" predikátuma.)

Illetve, ha az értelmezési tartomány az **I** halmaz:

$$\forall(x)\ [F(x) \rightarrow Sz(x)]$$
$$Sz(x) = x \text{ szigetelő}$$
$$F(x) = x \text{ fém}$$

Az egzisztenciális kvantifikáció eredményeként kapott formula a „*részleges ítélet*"-tel hozható kapcsolatba. A részleges állító és részleges tagadó ítéletek kifejezhetők az egzisztenciális kvantor segítségével. Például „Van olyan fém, amely színes" részleges állító (**I** típusú) ítéletet egzisztenciális kvantor alkalmazásával így formalizálhatjuk:

$$\exists(x)\ _{\mathcal{F}}\ Sz(x)$$
$$Sz(x) = x \text{ színes}$$
$$\mathcal{F} = \text{a fémek halmaza}$$

Ugyanezt az ítéletet formalizálhatjuk $\mathcal{J}$ individuumtartományban is:

$$\exists(x)\ [F(x) \wedge Sz(x)]$$
$$F(x) = x \text{ fém}$$
$$Sz(x) = x \text{ színes}$$

Miért használtuk itt a konjunkció műveletét?

A „Van olyan fém, amely színes" ítélet ugyanis azt állítja, hogy van olyan x, amely beletartozik a „fémek" halmazába *és* bele-

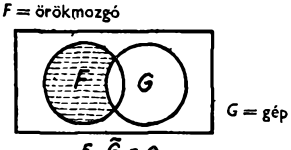
tartozik azoknak a dolgoknak a halmazába is, amelyek „színesek". A részleges állító ítéletet tehát így fejezhetjük ki: „Van olyan x, amely x fém és színes."

Fentiek alapján a részleges tagadó ítélet, „Van olyan fém, amely nem színes" kifejezése:

$$\text{I. } \exists(x)_{\mathcal{F}} \overline{Sz(x)}$$
$$\text{II. } \exists(x) \quad \overline{F(x) \wedge Sz(x)}$$

$Sz(x)$ = x színes
$\mathcal{F}$ = a fémek halmaza
$F(x)$ = x fém

Az egzisztenciális és az általános kvantorral kapott ítéletformulák az egyetemes és a részleges ítéletek Boole-féle interpretációjának felelnek meg. Ugyanis a $\exists(x)\,(F(x) \wedge G(x))$ formula csak akkor veszi fel az igaz értéket, ha *létezik* olyan x, amelynek van F predikátuma és G predikátuma. Ezzel szemben a $\forall(x)\,[F(x) \rightarrow G(x)]$ formula felveheti az igaz értéket akkor is, ha nem létezik olyan x, amely F predikátummal rendelkezik, azaz ha F predikátummal rendelkező x-ek halmaza *üres*. Ez esetben ugyanis az $[F(x) \rightarrow G(x)]$ implikáció igaz lesz. Legyen pl. $F(x) = x$ örökmozgó, $G(x) = x$ gép. Ebben az esetben $\forall(x)\,[F(x) \rightarrow G(x)]$ formula a következő ítéletet fejezi ki: „Minden örökmozgó — gép". Ez az ítélet Boole interpretációjában igaz tétel, hiszen csak annyit állít, hogy üres halmaz „az örökmozgó nem-gépek" halmaza.



Az $F \cap \tilde{G}$ halmaz valóban üres, hiszen üres az egész F halmaz. Ezért a $\forall(x)\,[F(x) \rightarrow G(x)]$ formula nem veheti fel a hamis értéket, mert ha $F(x)$ üres, nem állhat elő az az eset, hogy (x) helyébe valamely individuumot helyettesítve $G(x)$ hamis és $F(x)$ igaz legyen.

A kvantifikálás művelete alkalmazható többváltozós formulákra is.

Többváltozós nyitott formulák esetében a kvantifikálás művelete tulajdonképpen több szakaszból áll. (A többváltozós formulák mindaddig nyitott formulák, amíg valamennyi változójuk nincs kvantifikálva.)

$F(x, y)$-ből

az y általános kvantifikálásával:

$$\forall(y)\ F(x, y),$$

majd az x általános kvantifikálásával:

$$\forall(x)\ [\forall(y)\ F(x, y)]^{16}$$

E formula jelentése: Minden x, valamint minden y között fennáll az F reláció.

Az egzisztenciális kvantifikáció többváltozós formulákra való alkalmazására példa:

$$\exists(x)\ \exists(y)\ \ G(x, y)$$

(Van olyan x, valamint van olyan y, hogy közöttük fennáll a G reláció.)

Többváltozós nyitott formulák esetében természetesen lehet a két kvantifikációt vegyesen is alkalmazni. Az így kapott formulák már bonyolultabb ítéletek kifejezései lesznek, így pl. $\exists(x)\ \forall(x)\ [K(x, y)]$ formulában x-re az egzisztenciális kvantifikáció, y-ra az általános kvantifikáció műveletét alkalmaztuk. A formula jelentése: „Van olyan x, amely minden y-nal a K viszonylatban áll". Ha K a könnyen barátkozás viszonylata, x a „kutyák" individuumtartományán, „y" az emberek individuumtartományán van értelmezve, akkor az $\exists(x)\ \forall(y)\ [K(x, y)]$ formula a „Van olyan kutya, amely minden emberrel könnyen barátkozik" ítélet jelölésére szolgál.

Többváltozós formuláknál a kvantorok sorrendjének felcserélése bizonyos esetekben megváltoztatja a formula jelentését. Így pl. ha a fenti formulánál az egzisztenciális és az általános kvantor helyét felcseréljük,

$$\forall(y)\ \exists(x)\ [K(x, y)] \text{ formulához jutunk.}$$

(Minden y-ra áll, hogy van olyan x, amellyel a K viszonylatban áll.)

Ha az individuumtartományokat és a K viszonylatot az előző módon határozzuk meg, akkor a „Minden emberre áll, hogy van olyan kutya, amelyik könnyen barátkozik vele" ítéletet kapjuk, amelyről világos, hogy nem azonos igazságértékű a „Van olyan kutya, amely minden emberrel könnyen barátkozik" ítélettel.

Foglaljuk össze, hogy az elmondottak alapján milyen ítéletfajtákat különböztethetünk meg az egyszerű ítéleteken belül. Az eddig megismert predikátumkalkulusbeli formulák alapján a következő ítélettípusokat különböztethetjük meg:

1. Először is, attól függően, hogy valamely nyitott formulában szereplő változók helyébe individuumokat helyettesítünk, illetve a nyitott formulában szereplő változók kvantifikálásával nyerünk ítéletet, megkülönböztethetünk egyedi és nem-egyedi ítéleteket. Megjegyezzük, hogy van ebből a szempontból vegyes ítélet is. Így pl. „Egyetlen természetes szám sem előzi meg az 1-es számot".

$$\forall(x)\ \mathcal{C}\ \overline{M(x, 1)}$$

$M(x, 1) = x$ megelőzi 1-et

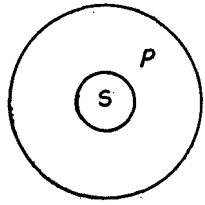
$\mathcal{C}$ = természetes számok halmaza.

2. Valamely predikátum függhet egy vagy több változótól. Ennek megfelelően egy alanyú és több alanyú (relációs) ítéletekről beszélhetünk.

3. Attól függően, hogy mely kvantor alkalmazásával alkotunk ítéletet, megkülönböztethetünk egyetemes, részleges, vegyesen egyetemes és részleges (pl. $\forall(x)\ \exists(y)\ F(x, y)$ formájú ítéleteket.

Nem vállalkozhatunk az ítéletek finomszerkezetének különbözőségén alapuló ítélettípusok gazdag sokaságának teljes bemutatá-

sára. E gazdagság további szemléltetésére csak egy-két példát említünk meg. Induljunk ki az ismert kategorikus ítéletpéldából: „Minden ember halandó". Ebben az ítéletben azt állítjuk, hogy az emberek beletartoznak a halandók osztályába. Körsémával ábrázolva:

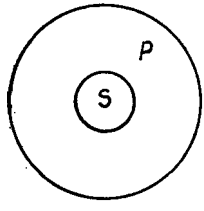


Mint már szó volt róla, az ilyen típusú ítélet a predikátumkalkulusban a következő módon formalizálható:

$$\forall(x)\ [E(x) \rightarrow H(x)]$$

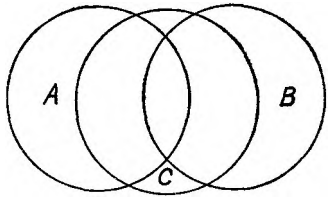
$E(x) = x$ ember
$H(x) = x$ halandó

Formalizáljunk egy másik, szintén *A* típusú ítéletet, pl. „Minden egyetemi hallgató, aki matematikai logikát hallgatott, tudja, hogy mi az implikáció". Az alany körébe azok az egyetemi hallgatók tartoznak, akik hallgattak matematikai logikát, az állítmány körébe azok, akik tudják, mi az implikáció. Az ítélet azt állapítja meg, hogy azoknak az egyetemi hallgatóknak a köre, akik hallgattak matematikai logikát, beletartozik azoknak a körébe, akik tudják, mi az implikáció.



S = azok az egyetemi hallgatók, akik hallgattak matematikai logikát.
P = azok, akik tudják, hogy mi az implikáció.

Ez az elemzés azonban nem tárja fel eléggé az adott ítéletben kifejeződő bonyolult viszonyt. Azt állítjuk, hogy az „egyetemi hallgatók" és „azok, akik matematikai logikát hallgattak" osztályának metszete beletartozik azoknak az osztályába, „akik tudják, mi az implikáció". Euler-körökkel tehát a következőképpen ábrázolható:



A = egyetemi hallgató
B = azok, akik matematikai logikát hallgattak
C = azok, akik tudják, mi az implikáció.

Ennek megfelelően ezt az ítéletet a következő módon formalizálhatjuk:

$A(x) = x$ egyetemi hallgató
$B(x) = x$ hallgatott matematikai logikát
$C(x) = x$ tudja, mi az implikáció

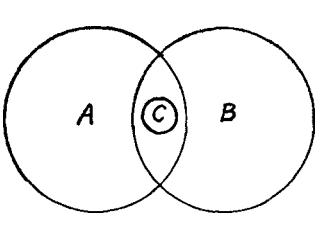
$$\forall(x)\ [A(x) \wedge B(x)] \rightarrow C(x)$$

További példa a bonyolultabb szerkezetű elemi ítéletekre: „Minden nullára vagy ötre végződő szám osztható öttel." Ez az ítélet relációs ítélet. Két alanya van. S_1 = nullára vagy ötre végződő szám. S_2 = öt. E két alany viszonyáról állítunk az ítéletben, nevezetesen azt, hogy S_1 és S_2 között fennáll az „oszthatóság" viszonylata. S_1 alanynak van azonban itt egy speciális vonása, mégpedig az, hogy összetett fogalom.

$N(x)$ = x nullára végződő szám
$Z(x)$ = x ötre végződő szám
$F(x, 5)$ = x osztható öttel

$$\forall(x)\ [N(x) \vee Z(x)] \rightarrow F(x, 5)$$

Összetett fogalom szerepel a következő ítéletben is: „Minden paralelogramma olyan idom, amelynek ellentétes oldalai egyenlők és párhuzamosak". Euler-körökkel ábrázolva az ítéletet:



A = olyan idomok, amelyeknek ellentétes oldalai egyenlők.
B = olyan idomok, amelyeknek ellentétes oldalai párhuzamosak.
C = paralelogrammák.

A predikátumkalkulusban a következő módon formalizálható ez az ítélet:

$C(x) = x$ paralelogramma
$A(x) = x$ olyan idom, amelynek ellentétes oldalai egyenlők
$B(x) = x$ olyan idom, amelynek ellentétes oldalai párhuzamosak

$$\forall(x)\ [C(x) \rightarrow (A(x) \wedge B(x))]$$

Meg kell jegyezni, hogy nincs mechanikusan alkalmazható kulcs arra nézve, hogy a természetes nyelvekben kifejezett ítéleteket hogyan fordítsuk át a predikátumkalkulus nyelvére. Az ítélet szerkezetét a formalizmusban annyira mélyen kell feltárni, amennyire az adott logikai feladat ezt szükségessé teszi. A relációs ítéletek formalizálhatók egy alanyú ítéletként, az összetett alanyú, illetve állítmányú ítéletek formulája felírható anélkül, hogy figyelembe vennénk összetettségüket. A formalizálás nem nevezhető hibásnak ez esetben sem, csak éppen nem tárja fel az ítélet minden sajátosságát. — Van azonban olyan eset, amikor az ítélet tartalmának meg nem értése olyan formula megalkotásához vezet, amely nem adja vissza a gondolat igazságtartalmát.

Így pl. hogyan formalizáljuk „A teremben jelenlevő valamennyi személy tanár vagy diák" ítéletet?

$T(x)$ = x tanár
$D(x)$ = x diák
$Sz(x)$ = x a teremben jelenlevő személy

1. $\forall(x)\ [(Sz(x) \rightarrow T(x) \vee D(x))]$
2. $\forall(x)\ [(Sz(x) \rightarrow \mathrm{T}(x))] \vee \forall(x)\ \ [(Sz(x) \rightarrow D(x))]$

Az első formula a helyes, a második nem, hiszen az „A teremben jelenlevő valamennyi személy tanár vagy a teremben jelenlevő valamennyi személy diák" ítélet nem azonos igazságértékű az „A teremben jelenlevő valamennyi személy tanár vagy diák" ítélettel.

Hogyan formalizáljuk „A sikkasztás és a megvesztegetés büntetendő cselekedet" ítéletet?

Formalizálhatjuk az alábbi módokon:

$M(x)$ = x megvesztegetési cselekedet
$B(x)$ = x büntetendő cselekedet
$S(x)$ = x sikkasztási cselekedet

$\forall(x)\ \ (S(x) \rightarrow B(x)) \wedge \forall(x)\ (M(x) \rightarrow B(x))$
$\forall(x)\ \ [(S(x) \vee M(x)) \rightarrow B(x)]$

De nem formalizálható (bár mechanikus eljárást alkalmazva hajlamosak lehetnénk rá), így:

$$\forall(x)\ [(M(x) \wedge S(x)) \rightarrow B(x)]$$

(Ez ugyanis csak a megvesztegetés és sikkasztás együttes elkövetéséről állítja, hogy büntetendő.)

13. Állapítsuk meg, mitől függ az alábbi egyszerű ítéletek igazsága:
Formalizáljuk ezen ítéleteket a predikátumkalkulus formuláival.

A Föld bolygó.
A róka ragadozó vadállat.
A mindenség végtelen.
Péter jó tanuló.

14. Rendeljük hozzá az *a)* csoportban szereplő valamennyi predikátumot a *b)* csoport tárgyaihoz. Állapítsuk meg, mikor kapunk a hozzárendelés eredményeként igaz, mikor hamis ítéletet.

a)	*b)*
szép	Föld
véges	Péter
végtelen	a számsor
kerek	a macska
játékos kedvű	a zsemle

15. Csoportosítsuk az alábbi ítéleteket a bennük fellelhető alanyok száma szerint (egyváltozós, legfeljebb kétváltozós, legfeljebb háromváltozós stb. ítéletek).

Az anya, az apa és a gyerek egy sorban haladtak.
A vadász megölte a medvét.
A termelési viszonyok megfelelnek a termelőerők fejlettségének.
Az osztály minden tanulója szorgalmas.
A három páratlan szám.

16. Ha $P(x)$ értéke akkor igaz, ha x prímszám, és $G(x)$ értéke akkor igaz, ha x páros szám, akkor mikor igaz az alábbi formulák értéke:

$$\overline{P(x)}$$
$$\overline{G(x)}$$
$$\overline{P(x) \wedge G(x)}$$
$$P(x) \wedge \overline{G(x)}$$
$$P(x) \wedge G(x)$$
$$\overline{P(x) \rightarrow G(x)}$$

17. Mi a jelentésük az alábbi kifejezéseknek, ha

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(x) &= x \text{ ehető dolog} \\ \mathcal{N} &= \text{a növények halmaza} \\ \forall(x)_{\mathcal{N}}\ & E(x) \\ \exists(x)_{\mathcal{N}}\ & E(x) \\ \exists(x)_{\mathcal{N}}\ & \overline{E(x)} \\ \forall(x)_{\mathcal{N}}\ & E(x) \end{aligned}$$

18. Mi a jelentésük az alábbi formuláknak, ha

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(p, z) &= p\text{-nek } z \text{ az apja} \\ \mathcal{E} &= \text{az emberek halmaza} \\ \forall(p)_{\mathcal{E}}\ & \forall\,(z)_{\mathcal{E}}\ \mathrm{A}(p, z) \\ \exists(p)_{\mathcal{E}}\ & \exists\,(z)_{\mathcal{E}}\ \mathrm{A}(p, z) \\ \exists(p)_{\mathcal{E}}\ & \forall\,(z)_{\mathcal{E}}\ \mathrm{A}(p, z) \\ \forall(z)_{\mathcal{E}}\ & \exists\,(p)_{\mathcal{E}}\ \mathrm{A}(p, z) \\ \exists(z)_{\mathcal{E}}\ & \forall\,(p)_{\mathcal{E}}\ \mathrm{A}(p, z) \\ \forall(p)_{\mathcal{E}}\ & \exists\,(z)_{\mathcal{E}}\ \mathrm{A}(p, z) \end{aligned}$$

19. Alakítsuk át a 17. feladat formuláit úgy, hogy az értelmezési tartomány $\mathcal{A}$ halmaz legyen. $N(x) = x$ növény. Az átalakítással kapott formulák ugyanakkor legyenek igazak, amikor az eredeti formula értéke igaz.

20. Keressünk olyan értelmezési tartományokat, amelyekben igazak az alábbi formulák.

$\forall(x)\ \exists(y)\ (R(x, y))$	$R(x, y) = x$ rokona y-nak
$\forall(x)\ L(x)$	$L(x) = x$ vizsgázni köteles logikából
$\forall(x)\ (E(x) \rightarrow L(x))$	$E(x) = x$ Budapesten egyetemi hallgató
$\exists(x)\ H(x)$	$H(x) = x$ hűséges
$\exists(x)\ (K(x) \wedge H(x))$	$K(x) = x$ kutya

21. Formalizáljuk az alábbi ítéleteket:
Nem minden szerző, aki híres, tehetséges.
Van olyan tanuló, aki okos és szorgalmas.
Nincs olyan kabát, amely vízhatlan, kivéve ha impregnálva van.
A pokolhoz vezető út is jószándékkal van kikövezve.

3.3. KÖVETKEZTETÉSEK ELEMZÉSE A PREDIKÁTUMKALKULUSBAN

AZ ELDÖNTÉSPROBLÉMA

Már szó volt arról, hogy a relációs ítéletek és az ezekkel végzett következtetések modern logikai elemzésére a predikátumkalkulus ad lehetőséget. A predikátumkalkuluson belül lehetőség van arra, hogy az arisztotelészi szillogizmusok érvényességét és ezen túlmenően számos olyan, az ítéletek finomszerkezetén alapuló következtetés érvényességét is igazoljuk, melyekkel a hagyományos logika nem foglalkozott.[17]

A kategorikus szillogizmus premisszái és zárótétele egyváltozós logikai függvényekkel felírhatók. (Hiszen ezek **A**, **E**, **I**, **O** típusú ítéletek és, mint tudjuk, ezek egyváltozós függvényekkel ábrázolhatók. Ha az egyes premisszákat kifejező függvényeket konjunkcióval, a premisszákat és a zárótételt pedig implikációval összekapcsoljuk, olyan csupa egyváltozós függvényből álló predikátumkalkulusbeli formulát kapunk, amely a kategorikus szillogizmus valamely módozatát kifejező érvényformula lesz.

A predikátumkalkuluson belül megoldott kérdés bármely olyan formula mindig-igaz voltának eldöntése, amely formula csak egyváltozós függvényekből áll, így a kategorikus szillogizmus bármely módozatának érvényessége a predikátumkalkulus eszközeivel igazolható.

A relációs következtetések érvényformulái több változót tartalmazó mindig-igaz formulák. A predikátumkalkulus képes bizonyos többváltozós függvények mindig-igaz voltának megállapítására is. Így megoldott a probléma pl. arra az esetre, amikor a formulában

csupa általános, illetve csupa egzisztenciális kvantor szerepel, ha a formulában szereplő általános kvantorok mind megelőzik a formulában szereplő egzisztenciális kvantorokat, ha a formulában csak egy egzisztenciális kvantor szerepel stb. De nincs általánosan alkalmazható módszer pl. az olyan többváltozós függvények mindig-igaz voltának vizsgálatára, ahol kettő vagy ennél több nem szomszédos egzisztenciális kvantor szerepel (tehát elválasztja őket egy általános kvantor). Mivel a predikátumkalkulusban vannak olyan formulák, amelyek mindig-igaz voltának elemzésére nincs kidolgozott módszer, ezért a *predikátumkalkulusban az eldöntésprobléma nincs megoldva*. Ez azt jelenti, hogy nincs olyan módszer, amellyel a predikátumkalkulus *bármely* formulájáról eldönthetnénk, hogy mindig-igaz formula-e.[18]

Mi okozza a predikátumkalkulusban az eldöntésprobléma megoldásának nehézségét?

A kijelentéskalkulusban mindig-igaznak neveztük azt a formulát, amely a formulában szereplő változók bármely értéke esetén (tehát akár igaz, akár hamis az egyes változók értéke) igaz. A predikátumkalkulus formuláinak igazsága azonban jóval több tényezőtől függ. Függ először is attól, hogy a függvény milyen individuumtartományon van értelmezve, függ továbbá attól, hogy mely predikátumot rendeljük az individuumhoz (hogyan definiáljuk a formulában szereplő logikai függvényeket), továbbá, ha a formulában szabad változók is vannak, attól is függ, hogy ezek a szabad változók az individuumtartomány mely részét jelentik. *Mindig-igaz predikátumkalkulusbeli formulának* csak az olyan formulát nevezhetjük, amely — bárhogyan választjuk meg az értelmezési tartományt, bárhogyan vannak definiálva a formulában szereplő logikai függvények és bárhogyan választjuk az individuumtartomány elemei közül a formulában szereplő szabad individuumváltozók értékeit — csak igaz értéket vesz fel. Például mindig-igaz formula:

$$\forall(x)\ [F(x) \vee \bar{F}(x)]$$

Ugyanis bármely individuumtartományban — bármely eleméről is legyen szó — igaz, hogy vagy megvan valamely predikátuma (F), vagy ha nincs meg ez a predikátuma, akkor megvan az ellentmondó predikátuma ($\bar{F}$).

Ahhoz tehát, hogy valamely predikátumkalkulusbeli formuláról eldönthessük, hogy mindig-igaz-e, tekintetbe kell vennünk az összes individuumtartományt és az összes predikátumot. Ezzel a predikátumkalkulus olyan problémához ért el, ahol végtelen nagyságokkal van dolga. Hiszen végtelen sok individuumtartomány, individuum, predikátum létezik. Ez teszi igen bonyolulttá a predikátumkalkulus formuláinak tanulmányozását. Mindez azonban nem jelenti azt, hogy van olyan predikátumkalkulusbeli formula, amellyel kapcsolatban az eldöntésprobléma megoldása lehetetlen. A kutatások eredményeként a predikátumkalkulus formuláinak mind több és több csoportjára vonatkozóan találnak a kutatók olyan általános módszert, amellyel az adott csoportba tartozó összes formulákkal kapcsolatban megoldható az eldöntésprobléma. Az a tény azonban, hogy tudásunk fejlődése nyomán a predikátumkalkulusbeli formuláknak mind újabb és újabb csoportjával kapcsolatban tudjuk megoldani az eldöntésproblémát, még nem jelenti annak bizonyosságát, hogy a modern logika eléri egyszer fejlődésének azt a pontját, hogy az eldöntésprobléma általában, bármely predikátumkalkulusbeli formulával kapcsolatban megoldott legyen. Sőt egyes meggondolások arra mutatnak, hogy az eldöntésprobléma általános megoldása a predikátumkalkulusban nem lehetséges. A. Church ugyanis bebizonyította, hogy azzal a módszerrel, amelyet az eldöntésprobléma eddig megoldott eseteinél alkalmaztak, az eldöntésproblémát általános formában nem lehet megoldani. Ebből — egy ismeretelméleti jellegű hipotézisre támaszkodva — arra a következtetésre jutott, hogy az eldöntésprobléma egyáltalán nem oldható meg a maga teljességében.[19]

3.4. AZ ELDÖNTÉSPROBLÉMA ISMERETELMÉLETI JELENTŐSÉGE

A logikusok egy része bizonyítottnak elfogadva azt a tézist, hogy az eldöntésprobléma általános megoldása elvileg lehetetlen, arra a következtetésre jutott, hogy a matematikai logika területén beigazolódott: a világ megismerhetetlen. A valóság ezzel szemben

az, hogy az eldöntésprobléma tulajdonképpen nem *egy* probléma, hanem problémasereg, általános megoldása tehát végtelen számosságú problémasereg megoldását tételezi fel. (Végtelen számosságú formula mindig-igaz voltának vizsgálatára kell általános módszert találni.) Az agnoszticizmussal szemben álló dialektikus materializmus azonban a megismerést végtelen folyamatnak tekinti, amely adott fejlődési szakaszban sohasem tekinthető lezárultnak, befejezettnek. Megismerésünk fejlődésének nincs elvi határa. Az agnoszticizmusnak bizonyítania kellene, hogy vannak olyan formulák, amelyekkel kapcsolatban sohasem fogjuk tudni megválaszolni, hogy mindig-igaz formula-e vagy sem. Ilyen formulák azonban nincsenek. Így tehát nem elvileg megoldhatatlan problémák, hanem csak adott történelmi korszakban megoldhatatlan problémaseregek léteznek. A megismerés a problémaseregek egyes problémáinak állandóan növekvő halmazával mind előbbre halad az *egyes korok számára* kimeríthetetlen, végtelen megismerési folyamat útján.

Az eldöntésprobléma általános megoldásának hiánya azt jelenti, hogy nem tudjuk felsorolni, melyek az összes logikailag helyes következtetési eljárások. Sőt, ha az eldöntésprobléma a predikátumkalkulusban általános formában megoldhatatlan, akkor mindig lesznek olyan formulák, amelyek mindig-igaz voltát még nem tudjuk eldönteni, tehát amelyekről nem tudjuk, érvényes következtetési eljárás érvényformulái-e. Mindez filozófiai szempontból azt jelenti, hogy nemcsak az anyagi világ végtelen — és ebből következőleg végtelen ennek megismerése —, de maga a megismerés *eszközeit* képező eljárások számossága is végtelen, és ezen eszközök megismerése is csak végtelen folyamatban valósulhat meg.

Mivel a modern logika vizsgálódásai során olyan eredményre jutott, hogy végtelen sok logikailag helyes következtetés létezik és ezek elemzése csak a megismerés végtelenjében valósulhat meg, ezért nem válaszolható meg általánosan az a kérdés, hogy melyek az összes logikailag helyes következtetések. Márpedig a különböző tudományos hipotézisek igazolásához szükséges lenne tudni, hogy nincs-e olyan logikailag helyes következtetési eljárás, amelyet alkalmazva a hipotézist más bizonyítottan igaz tételekkel összekapcsolva ellentmondáshoz jutnánk.

A modern logika — anélkül, hogy a predikátumkalkulusban az érvényes következtetések igazolása befejeződött volna — figyelembe tudja venni valamely rendszer ellentmondásmentességének vizsgálatánál azokat a következtetéseket is, amelyeknek érvényességét még nem bizonyította a predikátumkalkulus, de amelyek a rendszer érvényes következtetései. Ezt a lehetőséget a predikátumkalkulus axiomatikus felépíthetősége teremti meg. E tény megértéséhez meg kell ismerkednünk a deduktív rendszer fogalmával és e rendszerek néhány sajátosságával.

V. A DEDUKTÍV RENDSZEREKRŐL

Eddig a fogalmak, az ítéletek és az ezekből felépülő következtetések logikai szerkezetét vizsgáltuk. Eközben nemegyszer volt szó magáról a logika tudományáról, annak kategóriáiról, felépítéséről, módszeréről is. Így pl. az összetett kijelentéseket elemezve utaltunk arra, hogy az ítéletek durvaszerkezetének logikája meghatározott absztrakciós szinten foglalkozik az ítéletekkel. Továbbá a kategorikus szillogizmus érvényes alakzatait vizsgálva több helyütt kitértünk az arisztotelészi szillogisztika felépítési rendszerére is. Az ilyen megállapítások már a logika tudományára vonatkozó, úgynevezett metalogikai kijelentések, amelyek a metodológia körébe tartoznak. A metodológia a tudományos tételek bizonyítási módszereit, a tudományos rendszerek felépítési módszereit stb. kutatja. E fejezetben metodológiai problémákról, nevezetesen a bizonyítás fogalmáról, általános sajátosságairól, és a deduktív tudományos rendszerek felépítési elveiről lesz szó.

1. A BIZONYÍTÁS

1.1. TÉZIS ÉS ÉRVEK

A bizonyítás valamely tétel(ek) igazságát megalapozó eljárás. Minden bizonyításban tézist és érveket találunk. A *tézis* maga a bizonyítandó tétel, az *érvek* (argumentumok) a tézist alátámasztó tételek. A bizonyítás két szakaszból tevődik össze. Egyrészt az érvek kikeresésből, másrészt következtetési műveletből, amellyel kimutatják, hogy az adott tételek elégséges alapul szolgálnak a tételek igazságának alátámasztására.

A *bizonyítás folyamata az érvek kikeresésével kezdődik*. Érvként felhasználhatók tapasztalati tények, logikailag megalapozott ítéletek, axiómák, definíciók. (Az ún. deduktív tudományok megkülönböztető sajátossága az ún. induktív tudományoktól, hogy ezekben minimálisra igyekeznek csökkenteni az olyan bizonyítást, amely azon alapszik, hogy a tézis közvetve vagy közvetlenül következik ismert tapasztalati tényekből.)

A tudományos bizonyításokban a tapasztalati tényeken kívül olyan tételeket is felhasználnak, amelyeket logikai úton valamely előző bizonyítási folyamatban már igazoltak. Így tehát valamely tétel bizonyításához már előzőleg bizonyított tételeket felhasználva olyan bizonyítási láncolat adódik, ahol az egyes tételek igazságát más megelőző tételek igazságával alapozzák meg. Ebben a láncolatban szükségképpen el kell jutni olyan tételekig, amelyek bizonyossága már nem előző bizonyított tételek igazságából következik. Ezek a tételek az axiómák.

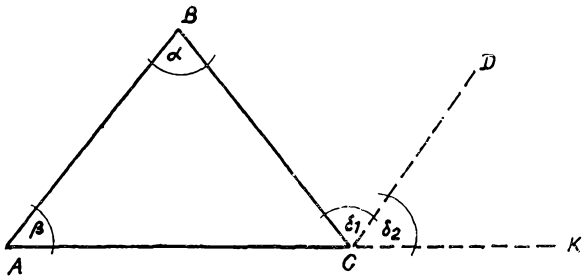
Az „ideális" tudomány az lenne, amelyben minden tétel bizonyítása logikailag szükségszerű következtetésekkel történne, más, már bebizonyított tételekből. Könnyen belátható azonban, hogy ez az „ideál" gyakorlatilag nem valósítható meg. Minden tudományos rendszer tartalmaz olyan igazságokat, amelyeket az adott rendszerben nem bizonyítanak már bizonyított tételekre való visszavezetéssel. A deduktív tudományok sajátossága, hogy csak azt fogadják el tudományos igazságnak, ami közvetlenül vagy közvetve levezethető — logikailag szükségszerű következtetésekkel — valamely tudományos rendszer axiómáiból.

A tudományos ismeretek ítéletek formáját öltik. Az ítéleteket terminusok alkotják. A tudományos ítéletekkel szemben támasztott egyik fontos követelmény, hogy a bennük szereplő terminusok szabatosan definiált fogalmak legyenek. A tudományos fogalmak definiálása már definiált fogalmakkal történik. Azonban ez sem történhet végtelen folyamatban. Minden tudományban szükség van arra, hogy bizonyos fogalmakat más fogalmakra való visszavezetés nélkül fogadjanak el. Az ilyen fogalmakat az illető tudomány alapfogalmainak, kategóriáinak nevezzük. A deduktív tudományok sajátossága az, hogy az olyan fogalmaik, amelyek nem tartoznak az adott deduktív rendszer alapfogalmai közé, vissza-

vezethetők az alapfogalmakra, vagyis ezekből az alapfogalmakból kiindulva, ezek felhasználásával definiálhatók.

A bizonyítás folyamatának második szakasza a következtetési eljárás. A megfelelő érvek még „nem beszélnek maguktól", vagyis az érvek megkeresése, kiválasztása után ki kell mutatni ezeknek az érvként használt tételeknek a kapcsolatát, összefüggését a bizonyítandó tételekkel. Az adott tétel igaz vagy hamis voltára csak akkor következtethetünk, ha már megállapítottuk a logikai összefüggést a tétel és a megtalált érvek között. A logikai összefüggés kimutatása következtetések sorozata révén történik. A következtetések összességét, amelyekben megállapíthatjuk a tétel logikai összefüggését az érvekkel, és amelyek elvezetnek a tétel igaz vagy hamis voltáról alkotott zárótételhez, a *bizonyítás formájának nevezzük.* A bizonyításnak tehát elengedhetetlen mozzanata, eszköze a következtetés. A bizonyítás folyamatában felhasználjuk a helyes következtetéseknek azt az alapvető tulajdonságát, hogy ha premisszái igazak, akkor igaz zárótételt kapunk. Ezért ha kimutatható, hogy a bizonyítandó tétel érvényes következtetésekkel levezethető az érvekből (más igaz tételekből), akkor ez elégséges alapot ad a tétel logikai bizonyításához.

Vegyünk egy példát a bizonyítás menetének bemutatására: Bebizonyítandó, hogy a háromszög valamely külső szöge egyenlő két, vele nem határos belső szöge összegével (tézis). Ennek a tételnek a bizonyítására érveket kell találnunk. Ezzel kezdődik a demonstráció. Ahhoz, hogy megtaláljuk a BC és CK egyenesek között fekvő külső szög (δ) összefüggését α és β szögekkel, meghúzzuk az AB egyenessel párhuzamos CD egyenest.



Ez az egyenes δ szöget két szögre ($\delta 1$ és $\delta 2$) osztja. A tézist bebizonyítjuk, ha megmutatjuk, hogy $\delta 1$ szög egyenlő α szöggel és $\delta 2$ szög egyenlő β szöggel. A $\delta 1$ és az α szögek váltószögek az AB és CD párhuzamos egyenesek mentén, amelyeket egy harmadik (BC) egyenes metsz. A $\delta 2$ és α szögek megfelelő szögek — ugyanazon párhuzamos egyenesek mentén —, amelyeket AK egyenes metsz. $\delta 1$ és α szögek egyenlő voltának bizonyításához tehát érvként felhasználjuk a váltószögekről és a párhuzamos egyenesek mentén fekvő megfelelő szögekről ismert tételeket. Bebizonyított tétel, hogy egy egyenes által metszett párhuzamos egyenesek mentén fekvő váltószögek egymással egyenlők. Ugyancsak tudjuk azt, hogy egy egyenessel metszett két párhuzamos egyenes mentén fekvő megfelelő szögek egyenlők. A bizonyítás további menetében ki kell mutatni, hogy a tézis igaz voltáról szóló zárótétel levonható az adott érvekből.

Más szavakkal kifejezve, a feladat most az, hogy megmutassuk: az érvek elégséges alapot adnak a tézis igaz voltának elismeréséhez. Itt áttérünk a demonstráció második részére. A talált érvekre támaszkodva arra lehet következtetni, hogy $\delta 1$ szög egyenlő α szöggel és $\delta 2$ szög egyenlő β szöggel. Mivel e szögek összege egyenlő δ külső szöggel, világos, hogy a háromszög külső szöge egyenlő a háromszög két belső, az adott külső szöggel nem határos szögének összegével. Ezt kellett éppen bizonyítanunk.

A gondolatmenetnek ezt a részét — hogy kiemeljük a bizonyítás formáját —, kifejtett formában is felírjuk:

1. Minden olyan két váltószög, amely egy harmadik egyenessel metszett két párhuzamos egyenes mentén fekszik, egyenlő egymással.

δ_1 és α szög olyan váltószögek, amelyek — egy harmadik egyenessel metszett — párhuzamos egyenesek mentén fekszenek.

Tehát

δ_1 és α szögek egyenlők egymással.

2. Egy harmadikkal metszett két párhuzamos egyenes mentén fekvő bármely két megfelelő szög egyenlő egymással.

δ_2 és β szögek egy harmadik egyenessel metszett két párhuzamos egyenes mentén fekvő szögek.

Tehát
δ_2 és β szögek egyenlők egymással.

3. Ha két összeg összeadandói egyenlők, akkor a két összeg is egyenlő. Egyrészt a δ_1 és δ_2 szögek összegének összeadandói, másrészt α és β szögek összegének összeadandói egyenlők,

tehát ezek az összegek egyenlők.

Tehát a háromszög külső szöge (δ) egyenlő két belső szögének (α és β) összegével, amelyek nem határosak vele.

Könnyű észrevenni, hogy a tézis és az érvek összefüggését itt egy sor szillogizmus formájában fejeztük ki. A szillogizmusoknak ez az összege a bizonyítás formája.

1.2. A BIZONYÍTÁS FAJTÁI

A „bizonyítás" kifejezés különböző terjedelmű fogalmak megjelölésére használatos. A bizonyítás szűkebb terjedelmével szembe lehet állítani a cáfolatot. Ebben a terjedelemben a bizonyítás valamely tétel igazságának kimutatása, a *cáfolat* valamely tétel hamis voltának a feltárása. A cáfolat azonban maga is bizonyítás, a tétel hamisságának bizonyítása. Ebben az esetben azonban a „bizonyítás" kifejezést már tágabb értelemben használjuk; valamely tétel igazságértéke igazolásának folyamatát értjük rajta.

A bizonyítás módszere alapján megkülönböztethetünk *direkt és indirekt bizonyítást, direkt és indirekt cáfolatot.*

A direkt bizonyításban a tézis igaz voltát a tézis és az igaz érvek közötti logikai összefüggések megállapításával bizonyítjuk. Ilyen bizonyítás az előbbi példánk is. (A háromszög külső szöge egyenlő két vele nem határos belső szögének összegével.) Vagy vegyünk egy példát a logika területéről.

Arisztotelész arra törekedett, hogy minél kevesebb tételt fogadjon el logikai megalapozás nélkül, ezért a kategorikus szillogizmus II. és III. alakzatainak módozatait, amelyek nem közvetlenül az axiómára, hanem az axiómából következő elvekre épülnek, visszavezette a közvetlenül az axiómára épülő első alakzat valamely

módozatára. Így pl. egyenes bizonyítással kimutatta, hogy a II. alakzat Cesare módozata (az a módozat amely **E, A, E** ítéletekből áll), visszavezethető az I alakzat Celarent (**E, A, E**) módozatára. A bizonyításban érvként a már előzőleg igaznak elfogadott „megfordítás" következtetési eljárást használta fel. Így tehát:

A Cesare
Egyetlen *P* sem *M*
Minden *S*—*M*
Egyetlen *S* sem *P*

helyes következtetési eljárás, mivel a nagypremissza, „Egyetlen *P* sem *M*" megfordítása esetén „Egyetlen *M* sem *P*" tételt kapjuk és így elérkezünk az axiómát kifejező Celarent-hoz:

Egyetlen *M* sem *P*
Minden *S*—*M*.
Egyetlen *S* sem *P*

A bizonyításban Arisztotelész az axióma és egy igaznak elfogadott tétel segítségével (Ha „Egyetlen *P* sem *M*", akkor „Egyetlen *M* sem *P*"), egyenes bizonyítással igazolta a tézist.

Az *indirekt bizonyításban* a tézis igaz voltát más tételek megcáfolása útján állapíthatjuk meg. Az indirekt bizonyítás egy fajtája az ún. *ellenkezőjével való bizonyítás*. Ebben az esetben a tézis igaz voltát a tézisnek ellentmondó ítélet megcáfolása útján bizonyítjuk be. Ugyanis ha sikerül megállapítanunk, hogy a tézisnek ellentmondó tétel (az antitézis) hamis, akkor ez elegendő alap ahhoz, hogy a tézis igaz voltára következtethessünk. Hiszen p és $\bar{p}$ ítélet közül nem lehet mindkettő hamis, ezért ha az egyiket megcáfoltuk, a másikat el kell fogadni. Az ellenkezőjével való bizonyítás módszerét már alkalmaztuk akkor, amikor az összetett ítéletekkel végzett következtetések érvényességét rövidített táblázatos módszerrel döntöttük el. A következőképpen okoskodtunk: Feltételeztük, hogy a zárótétel hamis és a premissza igaz, majd kimutattuk, hogy ez nem állhat fenn és ebből következtettünk arra, hogy a zárótétel igaz, ha a premisszák igazak.[1]

A szűkebb értelemben vett bizonyításnak fentebb ismertetett módjaihoz hasonlók a cáfolat módszerei is.

A direkt cáfolat — vagy ahogyan gyakran nevezik: a képtelenségig vitt cáfolat (reductio ad absurdum) — kimutatja a tézisről, hogy az igaz tételekkel (érvekkel) összekapcsolva hamis következményre vezet.

Az indirekt cáfolatnál a tézisnek ellentmondó tétel igazságát bizonyítjuk be. Ha a megcáfolandó tételnek ellentmondó ítélet igazságát bebizonyítjuk, ebből az ellentmondás törvénye alapján (két ellentmondó ítélet nem lehet egyaránt igaz) következtethetünk a tézis hamisságára.

A hamis tételek cáfolása mellett fontos szerepe lehet a hamis tételek „bizonyításánál" használt *eljárás* cáfolatának is. A tézis megcáfolása még nem mutatja meg, miért tarthatatlan maga a hamis tétel bizonyításmenete. Ahhoz, hogy magát a bizonyítási eljárást cáfoljuk meg, fel kell tárni a benne rejlő logikai hibákat. Másrészt viszont valamely tézis *bizonyításmódjának* cáfolása még nem jelenti magának a tézisnek a megcáfolását. Lehetséges ugyanis, hogy a tézis magábanvéve igaz, csak helytelenül bizonyítják.

1.3. A BIZONYÍTÁSOKBAN ELŐFORDULÓ HIBÁK

A bizonyítás helyes felépítésére, valamint a helytelen bizonyítások cáfolására vonatkozóan számos útmutatást dolgoztak ki a logika történetében. Ezek a követelmények, „szabályok" korántsem alkotják a helyes bizonyítás eléréséhez szükséges feltételek teljes rendszerét, de, mint hasznos útmutatásokkal, érdemes velük megismerkedni.

A bizonyításokban előforduló hibák három fő csoportra oszthatók:[2]

1. A tézissel kapcsolatos hibák
2. Az érvekkel kapcsolatos hibák
3. A bizonyítás formájával kapcsolatos hibák

A TÉZISSEL KAPCSOLATOS HIBÁK

A bizonyítás tézisével kapcsolatban leggyakrabban előforduló hiba *a tézis felcserélése*. Ez a hiba akkor áll elő, ha a bizonyítás folyamán nem annak a tételnek igaz (vagy hamis) voltát állapítjuk meg, amely tézisként szerepel, hanem a tézist a bizonyítás folyamán egy másik tétellel helyettesítik, cserélik fel, és ezt bizonyítják a tézis helyett. E hiba oka igen gyakran a fogalmak felcserélése. Az emberek gyakran pl. valamely cselekedet szükségességének bizonyítása helyett annak hasznosságát vagy megvalósíthatóságát, lehetetlensége helyett haszontalanságát stb. bizonyítják. Például az idealista filozófiai rendszerek egyike, amely be akarja bizonyítani az objektív és igaz ismeret lehetetlenségét, ehelyett gyakran ismereteink viszonylagosságát, pontatlanságát, nem teljes voltát bizonyítja. A bírói gyakorlatban néha ahelyett, hogy a vádlott bűnösségét bizonyítanák, csupán magát azt a tényt bizonyítják, hogy a vádlott elkövette a bűntettnek tartott cselekedetet, és nem azt, hogy az elkövetett dolog valóban bűnténynek minősül.

A tézis felcserélésének egyik válfaja az ún. „argumentum ad hominem" (személyre szóló érvelés). E hiba elkövetésekor a tézis bizonyítása vagy megcáfolása helyett a tézist kimondó személyek tekintélyére való hivatkozással vagy negatív jellemzésével akarnak bizalmat vagy bizalmatlanságot kelteni a tézis iránt.

Ilyen személyre szóló érvelés általános volt a középkorban, amikor valamely vita eldöntésére elegendő érv volt arra hivatkozni, hogy Arisztotelész ezt így állította.

A tézissel kapcsolatos másik hiba a *tézis mellőzése*. Ez a hiba akkor áll elő, amikor a vita során a felmerült kérdések megtárgyalása helyett igyekeznek más kérdésekre terelni a vitát és ezzel összezavarni a vita menetét.

AZ ÉRVEKKEL KAPCSOLATOS HIBÁK

Az érvekkel kapcsolatos alapvető hiba, ha a bizonyítás folyamán *hamis érveket* használnak. Ezt a hibát „alapvető tévedésnek" (error fundamentalis) nevezik. A hamis érvvel kapcsolatos hiba a

„túl sokat bizonyító" érvek használata is. Így nevezik azt az érvet, amelyből nemcsak a bebizonyítandó tézis következik, hanem más, hamis tételek is (ez pedig az érv hamis voltát bizonyítja). Például túl sokat bizonyító érv lesz, ha egy rendszer alaptételei közé hamis tételt veszünk fel. Az ilyen rendszerben ugyanis bármely tétel bizonyíthatóvá válik. (Itt olyan rendszerekre gondolunk, ahol a következmény fogalmát implikációval formalizáljuk.)

Előfordulhat az is, hogy olyan tételeket alkalmaznak érvként, amely adott összefüggésben, adott rendszerben igaz, de ezeket *más rendszerben* és más összefüggésben használják, olyanokban, amelyekben nem érvényesek. Például az a tétel, hogy a rész kisebb az egésznél, a véges mennyiségekre nézve igaz, de ha kiterjesztjük a végtelen mennyiségekre, akkor értelmetlennek bizonyul. Ha erre a tételre támaszkodva bizonyítanánk, hogy a páros számok mennyisége kisebb, mint az összes egész számoké, mivel a páros számok csak az összes egész számok egy részét teszik ki, akkor bizonyításunk helytelen lenne, minthogy az adott rendszerre nem érvényes érvet használnánk fel.

Az érvekkel kapcsolatos hiba a bebizonyítatlan, kétséges érv használata is.

Ennek a hibának különleges esete az *alap megelőzésének* nevezett hiba (petitio principii). Ez akkor áll elő, amikor olyan tételt használnak érvül, amely burkolt formában tartalmazza azt, amit be kellene bizonyítani. Ha pedig nyíltan kifejezzük a burkolt érvet — amely azonos a bizonyítandó tétellel —, akkor a „körbenforgó bizonyítás" vagy „hibás kör" (circulus in demonstrando) vagy másképpen „ugyanannak bizonyítása ugyanazzal" (idem per idem) elnevezésű hibát követjük el.

Körbenforgó bizonyításban a tézis bizonyítására felhozott érvként magát a tézist használják fel, vagy az érvet a tézis segítségével bizonyítják. Ismert irodalmi példa a körbenforgó bizonyításra az orvosjelölt okoskodása Molière „Képzelt beteg"-ében. A bizonyítandó tétel az, hogy az ópium altatószer. Az orvosjelölt így „bizonyít": „Az ópium alvást hoz létre, mivel altatóerő van benne, amelynek természete az, hogy az érzékeket elaltatja." Az ilyen egyszerű esetekben természetesen könnyen fel lehet ismerni a bizonyításban

előforduló kört, de az olyan bizonyításokban, amelyek következtetések egész sorozatát tartalmazzák, már kevésbé észrevehető az elkövetett logikai hiba.

A BIZONYÍTÁS FORMÁJÁBAN ELŐFORDULÓ HIBÁK

A bizonyítás formájában előforduló hiba, ha a bizonyítás (vagy cáfolat) céljából felhozott *érvek nem adnak elégséges alapot* arra, hogy a tézis igaz (vagy hamis) voltára következtethessünk. Az ilyen hibák közös elnevezése: „non sequitur" (nem következik).

A „non sequitur" hiba minden esetben a következtetés valamelyik szabályának megsértését jelenti. Néhány ilyen típusú hibát a következtetés formáinak és szabályainak tárgyalása során megvizsgáltunk, így most nem sorolunk fel újabb példákat.

2. AZ AXIOMATIKUS-FORMALIZÁLT RENDSZEREK

A tudományok történetében különböző formájú deduktív rendszerekkel találkozhatunk. Vannak ún. nem-axiomatikus deduktív rendszerek, axiomatikus deduktív rendszerek, axiomatikus-formális deduktív rendszerek. A matematika tudománya pl. kezdettől fogva deduktív tudomány, de az axiomatikus módszer széles körű alkalmazására csak a múlt század közepén tért át. A nem-axiomatikus deduktív rendszerek sajátossága, hogy bár megállapíthatók azok az alaptételek, alapfogalmak, amelyekre a tudomány összes tételei visszavezethetők, de ezek az alaptételek, alapfogalmak magában a rendszerben nem nyernek megfogalmazást. Továbbá a tudományos tételek egymásból való levezetése, bizonyítása logikailag szükségszerű következtetések formájában történik (a bizonyításokban nincs szerepe a tapasztalatra való hivatkozásnak), maga a rendszer azonban nem állapítja meg, nem sorolja fel a rendszer felépítésében felhasznált logikai eszközöket.

A tudományok területéről hozhatunk olyan példát is, hogy egy és ugyanazon teória felépíthető nem-axiomatikus és axiomatikus deduktív rendszer formájában is. Számunkra legkézenfekvőbb példa erre az ítéletek durvaszerkezetének logikája. Az az elmélet, amellyel az előzőekben megismerkedtünk, nem-axiomatikus felépítésű, de felépíthető axiomatikus, axiomatikus-formalizált rendszerben is.

Az axiomatikus-formalizált rendszerek elméletének kidolgozása Frege munkásságával vette kezdetét. Ő maga így jellemzi eredményeit: „Abban megyek tovább Euklidesznél, hogy a következmények elérésében alkalmazott következtetési eljárás előzetes megfogalmazását követelem."[3] Fregét megelőzőleg ugyanis a deduktív rendszerekben megengedett volt olyan következtetési eljárások használata, amelyeknek logikai helyessége esetleg csak a „józan ész ítélőszéke előtt" volt igazolva, vagyis, amelyek érvényességének bizonyítása nem deduktív rendszerben történt. Használtak továbbá olyan következtetési eljárásokat is, melyeknek érvényességét a hagyományos logika ugyan deduktív rendszerben bizonyította, de érvényességi körük pontos megállapítása nem történt meg (pl. kategorikus szillogizmusok).

Frege a deduktív rendszerek formalizálásának elveit is kidolgozta. E vonatkozásban leibnizi gondolatokat váltott valóra. Már említettük, hogy Leibniz a tudományok fejlődésének egyik akadályát abban látta, hogy a tudományokban használt fogalmak — hasonlóan a köznapi gondolkodás fogalmaihoz — nem kellően meghatározottak. A deduktív rendszerekben a köznyelv olyan kifejezéseit is használják, amelyeknél feltételezik, hogy jelentésük általánosan ismert. A gyakorlat azonban azt mutatta (pl. a matematika területén), hogy ez antinómiák keletkezéséhez vezethet. A formalizált rendszerekben — ahol a jeleknek, kifejezéseknek pontosan meghatározott jelentésük van — az ilyen típusú antinómiák elkerülhetők.

Az axiomatikus formalizált rendszereket további alcsoportokra lehet osztani.

2.1. A SZINTAKTIKAI RENDSZEREK

A szintaktikai rendszereket a szemantikai rendszerektől az különbözteti meg, hogy az első jeleknek jelekkel való kapcsolatából kiépített olyan rendszer, amely a jelek és a megjelöltek viszonyára vonatkozóan nem tartalmaz állítást. A szintaktikai rendszerek létrehozásának lehetőségével mód nyílik arra, hogy az emberi elme formalizálrendszereket építsen ki, anélkül, hogy számot vetne azzal, keresnét kutatná, vagy egyáltalán érdekelné, hogy rendszere mely objektumok rendszere, mely tudományterület formalizálását nyújtja. Természetesen, ha itt megállna a rendszert építő emberi elme tevékenysége, akkor mindez csak üres játék, szórakozás lenne. De ha — mint ahogy ez valóban van — a rendszeralkotás egy lépés, amelyet követ a rendszert kielégítő terület felkutatása és így a rendszer gyakorlati alkalmazásának megtalálása, akkor a puszta jelrendszerek kidolgozása az absztrakttól a konkréthoz vivő megismerési út fontos szakasza.

A jelek jelentésétől elvonatkoztatott axiómarendszerek kidolgozásának még más feladata is van. Megkönnyítik az axiómarendszerek általános tulajdonságainak vizsgálatát. Analógiával élve, ahogyan a gondolkodás tartalmától való elvonatkoztatás megkönnyítette a gondolkodás formai törvényeinek vizsgálatát, ugyanúgy a jelek jelentésétől elvonatkoztatott (interpretálás nélküli) axiómarendszerek megkönnyítik maguknak az axiómarendszereknek a vizsgálatát, ezek belső törvényeinek a feltárását. Ismerkedjünk meg közelebbről egy ilyen szintaktikai rendszerrel.

A KIJELENTÉSKALKULUS SZINTAKTIKAI RENDSZERE

A szintaktikai rendszer felépítéséhez először is a rendszer jeleit kell megadni.

Rendszerünkbe a jelek három különböző csoportja tartozik:

1. Latin nagybetűk A, B,... X, Y, Z. (Ezeket a jeleket változóknak nevezzük.)
2. $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $-$ (E jeleket logikai konstansoknak nevezzük.)

3. ( ) (Zárójelpárok. E jeleket segédjeleknek nevezzük.)

A jelek meghatározott kombinációi alkotják a formulákat. Rendszerünkben formulának csak a következő jelek, jelkombinációk tekinthetők:

I. A változók mindegyike formula

II. Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$[4] formula, akkor

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$$
$$(\overline{\mathcal{A}})$$

szintén formula.

A fentieken kívül semmilyen más jelkombináció nem formula. Tehát formulák pl.

$$(\bar{A} \wedge \bar{B})$$
$$((A \to B) \wedge C)$$
$$\overline{(A \to B)} \vee (C \wedge D)$$

De nem formula pl.

$(\to A)$ — (mert $\to$ csak formulák összekapcsolására szolgálhat)

(AB) — (mert formulák puszta egymás mellé írásából nem képződik formula)

$A \to B \wedge C$ — (mert hiányoznak a segédjelek)

$\vee \to$ — (mert logikai konstansok önmagukban nem képeznek formulát)

Jelrendszerünk bizonyos meghatározott formuláit axiómáknak nevezzük:

1. $(A \vee A) \to A$
2. $A \to (A \vee B)$
3. $(A \vee B) \to (B \vee A)$
4. $(A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B))$

Az axiómákból levezethető formuláknak vagy más néven rendszerünk tételeinek nevezzük mindazokat a formulákat, amelyek a levezetési szabályok alkalmazásával az axiómákból megalkothatók.

Következtetési szabályok:

1. *Behelyettesítési szabály:* Ha $\mathcal{A}$ tételben, amely A változót tartalmazza, A helyébe $\mathcal{B}$ formulát helyettesítjük — mindenütt, ahol az A változó szerepel — ismét tételt kapunk.

2. *Leválasztási szabály:* Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ a rendszer tételei, akkor $\mathcal{B}$ szintén tétele a rendszernek.

Az ítéletkalkulus ezen axiómarendszerének ismertetése után megállapíthatunk néhány olyan sajátosságot, amelyek bármely szintaktikai axiómarendszerre érvényes sajátosságok.

Az axiómarendszerek felépítése a következő lépésekben történik:

1. Megadjuk a rendszer jeleit. (A rendszer abécéjét.)

2. Szabályok megadása arra vonatkozóan, hogy a jelekből hogyan képezhetők formulák. (Kifejezések képzésének módja.)

3. A rendszerben képezhető formulák közül bizonyos formulákat alapformuláknak (axiómáknak) nevezünk el. Ezeket a rendszeren belül bizonyítás nélkül fogadjuk el.

4. Megadjuk a rendszeren belül megengedett logikai eljárásokat (következtetési szabályokat).

5. A rendszerben bebizonyított formulának, *tételnek* fogadjuk el azokat a formulákat, amelyek a rendszer axiómáiból a négyes pontban megadott szabályok alapján levezethetők. Maga az axiómarendszer ezeknek a tételeknek az összessége.

Valamely rendszer felépítéséhez (leírásához) más rendszer felhasználására van szükség (jelen esetben a magyar nyelv rendszere volt az a rendszer, amelyet felhasználtunk rendszerünk ismertetésére). Ez a tény is bizonyítéka annak, hogy nincsenek és nem is lehetnek abszolút lezárt rendszerek. Az ismeretek egymásra alapozódnak, egymást feltételezik.

Mint már mondottuk, a szintaktikai rendszerek kidolgozása nem öncél, hanem út valamely valóságterület megismeréséhez. E feladat megvalósításához a szintaktikai rendszerek ún. interpretálására van szükség, vagyis arra, hogy a jelek meghatározott dolgok megjelölésére szolgáljanak.

Az olyan rendszert, amelyben a jelek meghatározott, a rendszertől független objektumok megjelölői, szemantikai rendszernek nevezzük. Egy-egy szintaktikai rendszer esetleg több módon is interpretálható. Ha a rendszerben szereplő jelekhez más-más (de mindig meghatározott!) jelentést rendelünk hozzá, a rendszer axiómáinak más-más valóságterület képezi modelljét. Így van ez a kijelentéskalkulus esetében is. A kijelentéskalkulus szintaktikai rendszerének egyik megvalósítása (egyik modellje) a logikus gondolkodás egyik részterülete, az ítéletekből összetett ítéletek, az ítéletek durvaszerkezetén alapuló következtetések területe. Ennek igazolására az ítéletkalkulus szintaktikai rendszerében szereplő első jelcsoport (latin nagybetűk) jeleit ítéletek jeleiként, a második jelcsoportot ítéletek közötti logikai összefüggések jeleiként értelmezzük. Ez esetben a szintaktikai rendszer axiómái mindig-igaz ítéletek. Így tehát a kijelentéskalkulus megelőzőkben ismertetett szintaktikai rendszerének axiómáit az összetett ítéletekre interpretálva a következő axiómákat kapjuk:

$$1.\ (p \vee p) \rightarrow p$$
$$2.\ p \rightarrow (p \vee q)$$
$$3.\ (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$$
$$4.\ (p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$$

Fenti axiómák a kijelentések logikájának A. N. Whitehead—B. Russell-féle axiómarendszere. A mindig-igaz ítéleteknek számos más olyan csoportja is van, melyek együtteséből levezetési szabályokkal megkonstruálható az összes kijelentéslogikai mindig-igaz formula. A kijelentéskalkulus időbelileg első axiomatikus felépítése G. Fregétől származik. Frege rendszerének axiómái a következők:

$$\text{I.}\ p \rightarrow (q \rightarrow p)$$
$$\text{II.}\ (p \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$
$$\text{III.}\ [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$
$$\text{IV.}\ [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$$
$$\text{V.}\ \bar{\bar{p}} \rightarrow p$$
$$\text{VI.}\ p \rightarrow \bar{\bar{p}}$$

Az axiómákból az ún. levezetési szabályok alkalmazásával juthatunk el a kijelentéskalkulus többi mindig-igaz formulájához. *A kijelentéskalkulus levezetési szabályai* a behelyettesítési szabály és a leválasztási szabály.

A BEHELYETTESÍTÉSI SZABÁLY

A kijelentéskalkulus valamely mindig-igaz formulájában szereplő változók (p, q stb.) helyébe — mindenütt ahol ez a változó szerepel — behelyettesíthetjük a kijelentéskalkulus bármely formuláját anélkül, hogy az eredeti formula értéke megváltozna.

(Ugyanis a formula mindig-igaz volta éppen azt jelenti, hogy akár igaz, akár hamis a benne szereplő változók értéke, a formula igaz. Ezért ha hamis helyébe igazat vagy ha igaz helyébe hamisat helyettesítünk, ez nem változtat a formula mindig-igaz voltán.)

Például $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ formulába (I. axióma) p helyébe helyettesítsünk $(r \rightarrow d)$-t:

$$(r \rightarrow d) \rightarrow [q \rightarrow (r \rightarrow d)]$$

Így axiómából más mindig-igaz formulát kaptunk.

A LEVÁLASZTÁSI SZABÁLY

Ha egy implikáció igaz, valamint ismeretes, hogy az implikáció előtagja igaz, akkor az implikációs utótag is igaz kifejezés. Ennek értelmében, ha ismeretes pl.

$$[(p \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow [(\bar{p} \wedge (p \vee q)) \rightarrow q]$$

mindig-igaz implikáció, akkor mivel

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

mindig-igaz (I. axióma), ezért

$$[\bar{p} \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

szintén mindig-igaz formula.

Vizsgáljuk meg egy példán, hogyan képezhető valamely kijelentéskalkulusbeli mindig-igaz formula a kalkulus axiómáiból a levezetési szabályok alkalmazásával.

Például az említett két axiómarendszerben nem axióma a $p \to p$ mindig-igaz formula. Az I. és a II. axiómákból a levezetési szabályok felhasználásával levezethető ez a formula.

I. $p \to (q \to p)$
II. $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$

a II. axiómában helyettesítsünk r helyébe p-t:

$$[p \to (q \to p)] \to [(p \to q) \to (p \to p)],$$

mivel az implikáció előtagja az I. axióma, a leválasztási szabály alkalmazásával:

$$(p \to q) \to (p \to p),$$

q helyébe $q \to p$ formulát helyettesítjük:

$$[p \to (q \to p)] \to (p \to p),$$

az implikáció előtagja az I. axióma, ezért a leválasztási szabály alkalmazásával

$$p \to p,$$

amelynek levezetése kitűzött célunk volt.

A kijelentéskalkulus szintaktikai rendszerének nemcsak a fenti interpretációs lehetősége van. Ha az első jelcsoport jeleit osztályok jeleiként, a második jelcsoportot osztályműveletekként értelmezzük, az osztályok logikájához jutunk. Megint más tartalmat adva e jeleknek, eljutunk az áramkörök logikájához.

3. A DEDUKTÍV AXIÓMARENDSZEREK TULAJDONSÁGAI. AZ ELLENTMONDÁSMENTESSÉG

Ellentmondásmentes az axiómarendszer, ha axiómáiból a megadott következtetési szabályokkal levezethető tételek között nem lehetséges két olyan tétel, amelyek közül az egyik tagadása a másiknak. Az ellentmondásmentesség azért alapkövetelménye az

axiómarendszernek, mert ha a rendszer ellentmondásos, akkor e rendszerben bármely — a rendszer eszközeivel megfogalmazható — formula bizonyítható tétel. (Hamis ítéletből ugyanis bármely ítélet következik a $(h \rightarrow p) = i$ azonosságnak megfelelően.) Éppen ezért valamely rendszer ellentmondásmentességének bizonyítására elegendő találni *egy* olyan formulát, amely a rendszer formulája és ugyanakkor a rendszerben nem levezethető tétel. Az ellentmondásmentességet be lehet bizonyítani a rendszer interpretációjával. Ugyanis ha sikerül a rendszer jeleinek olyan értelmet adni, hogy az axiómák igaz ítéletek (valamely valóságterületre vonatkoztathatók) legyenek, akkor gyakorlati úton bizonyított a rendszer ellentmondásmentessége. Ez a bizonyítás annak a ténynek az elismerésén alapul, hogy a valóságról nem lehet logikailag ellentmondó igaz ítéleteket alkotni. E szerint *az axiómarendszer ellentmondásmentes, ha van legalább egy megvalósítása.* Az axiómarendszerek ellentmondásmentességének ilyen igazolásánál azonban fel kell tételezni, hogy az axiómák interpretációjával kapott ítéletek igazak. Éppen ezért az utóbbi időben kísérletek történnek az axiómarendszerek ellentmondásmentességének más típusú (nem interpretálás útján történő) bizonyítására is. Ilyen eljárás pl. az, hogy a rendszer axiómáit valamely más deduktív rendszerben bizonyítják. Ez utóbbi rendszert az előzőhöz való viszonyában metarendszernek nevezik.[5]

FÜGGETLENSÉG ÉS TELJESSÉG

Kevésbé fontos — viszonyítva az ellentmondásmentességhez — a rendszer axiómáinak függetlensége. *Független* az axiómarendszer, ha axiómái között nincs egyetlen olyan sem, amely a rendszer többi axiómáinak felhasználásával bizonyítható. Ha ugyanis az axióma bizonyítható a rendszerben, akkor elhagyható az axiómák sorából.

A harmadik kérdés, amely az axiómarendszerek vizsgálatánál felmerül, a rendszer *teljessége*. A probléma itt a következő: Megvan-e a rendszerben a lehetőség arra, hogy a rendszer eszközeivel megfogalmazható összes formuláról a rendszer következtetési szabályainak alkalmazásával eldöntsük, tétele-e a rendszernek (levezethető-e az axiómákból), vagy nem tartozik a rendszer tételeihez. *Teljesnek* nevezzük az axiómarendszert akkor, ha a rendszer

axiómáiból a megengedett következtetési szabályok alkalmazásával előállítható a rendszer összes igaz formulája. Van a teljességnek egy szigorúbb meghatározása is. Eszerint a rendszer akkor teljes, ha a rendszer axiómáihoz hozzácsatolva bármely olyan tételt, amely nem vezethető le a rendszerben, ellentmondásossá válik a rendszer.

4. LOGIKAI RENDSZEREK AXIOMATIKUS FELÉPÍTÉSÉNEK SZEREPE A TUDOMÁNYOS KUTATÁSBAN

A modern logika kialakulásának történeti körülményeiről szólva említettük már, hogy a logika továbbfejlődésében döntő szerepük volt a tudományok szükségleteinek, nevezetesen a különböző tudományok axiómarendszereik logikai megalapozását igényelték a logikától. Azonban ahhoz, hogy a logika ennek a feladatnak eleget tegyen, önmagának is axiomatikus felépítésűvé kellett válnia. Az eldöntésprobléma megoldatlansága miatt ugyanis a matematikai logika nem tudta megadni az összes lehetséges érvényes következtetési eljárás érvényformuláját. Így nincs lehetőség arra, hogy valamely axiómarendszer axiómáiról az összes lehetséges következtetési módot végigpróbálva lehessen kimondani, hogy nem vezethet ellentmondó tételekhez. Az eldöntésprobléma megoldatlansága az axiómarendszerek ellentmondásmentességének vizsgálatánál azonban csak nehézséget, de nem legyőzhetetlen akadályt jelent. Bebizonyosodott, hogy a kijelentéskalkulus és a predikátumkalkulus összes érvényes következtetési eljárása visszavezethető néhány véges számú következtetési eljárásra. Sikerült ugyanis a kijelentéskalkulust és a predikátumkalkulust is axiomatizálni. Vagyis sikerült megtalálni azokat az ítélet- és predikátumkalkulusbeli mindig-igaz formulákat, amelyeknek az összes többi kijelentés- és predikátumkalkulusbeli mindig-igaz formula a következménye.[6] Ezért bár az eldöntésprobléma megoldatlansága miatt nem ismerjük az összes érvényes következtetési eljárást (van olyan formula, amelyről

nem tudjuk, mindig-igaz-e), mégis meg tudjuk válaszolni azt a kérdést, hogy *ha* egy axiómarendszerben *kipróbáltuk volna* az összes következtetési eljárást, vajon ellentmondást tartalmaztak volna ezek a rendszerben levezetett tételek vagy sem. Más szóval a vizsgálódásoknál figyelembe tudjuk venni azokat a következtetési eljárásokat is, amelyeket jelenleg még nem ismerünk, mivel a kijelentés- és predikátumkalkulus eszközeivel formalizálható axiómarendszerek ellentmondásmentességének bizonyításához elegendő annak kimutatása, hogy a kijelentés- és predikátumkalkulus axiómáinak felhasználásával az adott axiómarendszer axiómáiból nem jutunk ellentmondó tételekhez.

De mit bizonyítottunk be az ítélet- és predikátumkalkulus axiómáinak felhasználásával valamely T tudományos rendszerről? Azt, hogy T rendszer ellentmondásmentes a kijelentés- és a predikátumkalkulus vonatkozásában. Mit jelentsen az, hogy a kijelentés- és a predikátumkalkulus vonatkozásában? Azt, hogy T rendszer ellentmondásmentes, ha a kijelentés- és a predikátumkalkulus rendszere ellentmondásmentes rendszer. De mivel e logikai rendszerekben is felvettünk axiómákat és következtetési szabályokat, tehát azt, hogy ezekben a logikai rendszerekben nem juthatunk ellentmondó tételekre, szintén bizonyítani kell.

Gondoljuk el: a logikai rendszerek tételeit úgy értelmeztük, mint a következtetések érvényformuláit. Ha tehát itt ellentmondó tételekre juthatnánk, ez azt jelentené, hogy a következtetési eljárások valamelyike — amelyet az axiómából kaptunk — nem helyes következtetési eljárás.

K. Gödel kimutatta, hogy egyetlen rendszernek, így logikai rendszernek sem lehet az ellentmondásmentességét magán az adott rendszeren belül bizonyítani. Valamely rendszer ellentmondásmentességének logikai úton (tehát nem interpretációval) történő bizonyításához más axiómarendszer kiépítésére van szükség.

Gödel azt is bebizonyította, hogy ilyen axiómarendszer — amely a rendszer *metarendszere* — minden esetben képezhető. Világos azonban, hogy e metarendszer ellentmondástalanságának bizonyítására ismét másik rendszerre, meta-metarendszerre van szükség, és így az egymást feltételező, egymásra épülő rendszerek végtelen sokaságát kapjuk.

Gödel tételét egyes filozófusok igyekeznek a világ megismerhetetlenségének alátámasztására felhasználni. Valójában azonban a Gödel-tétel a dialektikus materializmus ismeretelméletének egyik tudományos bizonyítéka. *A Gödel-tétel az axiómarendszerek vonatkozásában azt mutatja meg, hogy a megismerés sohasem zárulhat le.* A Gödel-tétel az axiomatikus rendszerek vonatkozásában igazolja, hogy nincsenek megismerhetetlen dolgok, nincsenek megismerhetetlen rendszerek. Minden rendszerhez létrehozható olyan metarendszer, amely alkalmas a rendszer sajátosságainak vizsgálatára.

Gödel tétele — amely szerint nem létezik az igaz ítéleteknek olyan rendszere, amelynek alapelveit feltárva a tudás végtelen anyagát egyszeriben birtokba vehetjük — arra kell hogy ösztönözze a tudósokat, hogy állandóan tökéletesítsék a megismerés *eszközeit*. Az eszközök tökéletesítésével a megismerés menetében állandóan növekszik a megismerhetővé vált dolgok köre. Ez azt is jelenti, hogy maga a megismerés folyamata, munkája mind sokrétűbbé, mind nagyobb területeket átfogóvá, extenzíve és intenzíve egyaránt magasabbrendűvé válik.

VI. A REDUKTÍV KÖVETKEZTETÉSEK

Reduktív következtetésnek nevezzük azt a következtetési eljárást, amely a premisszák igazsága esetén valószínűleg igaz zárótételt ad, ahol a premisszák igazsága esetén a zárótétel nem lehet szükségszerűen hamis. Reduktív következtetések vizsgálatával már Arisztotelész is foglalkozott, de a logikának ez a fejezete mind a mai napig sokkal kevésbé kidolgozott, mint a logikailag szükségszerű következtetések elmélete.

A reduktív következtetések matematikai módszereket alkalmazó igazolása a legutóbbi időkben a logikai vizsgálódások egyik központi kérdésévé vált. Különböző kalkulusrendszerek jöttek létre.[1] E következtetések modern logikai igazolásával nem foglalkozunk, csupán a reduktív következtetések néhány fajtáját említjük meg e fejezetben.

1. A REDUKTÍV KÖVETKEZTETÉSEK FAJTÁI

Az előzőekben tárgyalt következtetési eljárások közös sajátossága, hogy logikailag szükségszerű következtetések. Az ilyen következtetések csak egyik csoportját képezik a tudományokban alkalmazott következtetési és általában az új ismeretek feltárását elősegítő eljárásoknak. A tudományok előrehaladásához hipotézisek (feltételezések) felállítására van szükség. A hipotézisek logikai formájukat tekintve olyan következtetések zárótételei, amelyeknél a

premisszák nem nyújtanak elégséges alapot a zárótétel igazolásához, de elegendőek ahhoz, hogy valószínűsítsék a zárótétel (a hipotézis) igazságát.

A logikailag szükségszerű (szillogisztikus) következtetések körében nem-érvényes következtetések jelentős része mint reduktív következtetés elfogadható következtetési eljárás.

A feltételes szillogizmusok tárgyalásánál az érvényes modus ponens $p \rightarrow q$, p, Tehát: q tárgyalásával egyidejűleg felhívtuk a figyelmet arra, hogy a $p \rightarrow q$, q, Tehát: p következtetés nem érvényes, mivel q fennállását nemcsak p, hanem más tényező is kiválthatja, ezért q fennállása nem bizonyítja p igazságát. Nem bizonyítja, de tegyük most hozzá: valószínűsíti! Például egy anya megfigyeli, milyen tünetekkel jár kisgyermekénél a lázas állapot. Megfigyelései alapján a következő reduktív következtetést végzi:

Ha Pisti lázas, akkor étvágytalan és sokat alszik.
Pisti étvágytalan és sokat alszik.
Tehát: Pisti lázas.

E valószínűen igaz zárótételt kísérletileg ellenőrizni kell lázméréssel, és ez fogja igazolni vagy megcáfolni a reduktív következtetéssel kapott hipotézist.

A reduktív következtetéseket különböző alapokon lehet fajtákra osztani. A következtetés iránya szempontjából a reduktív következtetések között vannak induktív és nem-induktív következtetések. A fenti példák a reduktív következtetések nem-induktív csoportjába tartoznak.

Az induktív következtetések sajátossága, hogy a zárótétel az előzményekhez viszonyítva általánosabb tétel. (A dolgok tágabb köréről tartalmaz állítást.) Az *induktív következtetésekben* a megismerés iránya az egyedi ítéletektől halad az egyetemes ítéletek felé. Az induktív következtetéssel ellentétben *deduktív következtetésnek* nevezik az általánostól a kevésbé általános irányába haladó követ-

keztetést, és *traduktívnak* azokat a következtetéseket, ahol a zárótétel ugyanolyan általánosságú, mint az előzmények.

A fentieknek megfelelően induktív következtetés pl. a következő:

A réz jó vezető, a vas jó vezető, a cink jó vezető.
A réz, a vas, a cink fémek.
Tehát:
Minden fém jó vezető.

Deduktív következtetés:

Minden fém jó vezető.
Minden réz fém.
Tehát:
Minden réz jó vezető.

Traduktív következtetés:

Ha a réz fém, akkor a réz jó vezető.
A réz jó vezető.
Tehát:
A réz fém.

A fenti példák közül csak az induktív és a traduktív következtetési példák tartoznak a következtetések reduktív csoportjába. A deduktív következtetési példa logikailag szükségszerű következtetés. Ez esetben annak a hagyománynak megfelelően jártunk el, amely azonosítja a deduktív következtetés fogalmát a logikailag szükségszerű következtetés fogalmával. Valójában azonban itt két különböző felosztási alap keveredett. Az egyik felosztási alap a zárótétel bizonyítottságának kérdésével kapcsolatos. Ezen az alapon megkülönböztethetünk logikailag szükségszerű (szillogisztikus) és reduktív következtetéseket. A másik a következtetés iránya szerinti felosztás. Az iránya szerint induktív, traduktív vagy deduktív. következtetés lehet logikailag szükségszerű, vagy lehet reduktív.

A többértelműség elkerülése végett a továbbiakban megkülönböztetjük egymástól az induktív következtetések hagyományos csoportját, amelybe az irányuk szempontjából induktív (mint látni fogjuk, szillogisztikus és nem szillogisztikus) következtetések tartoznak, és az induktív következtetések szűkebb fogalmát, amelybe azok a reduktív következtetések tartoznak, amelyek irányuk szempontjából induktívak.

2. AZ INDUKTÍV KÖVETKEZTETÉS

2.1. A TELJES INDUKCIÓ

Teljes indukciónak nevezik az egyesről az általánosra történő következtetésnek azt a formáját, amelyben az általános tételt valamely osztály összes egyedeinek vizsgálata alapján vonják le.

Például: A hélium nemes gáz
A neon nemes gáz
Az argon nemes gáz
A kripton nemes gáz
A xenon nemes gáz
A radon nemes gáz.

A hélium, a neon, az argon, a kripton, a xenon, a radon alkotják az elemek periódusos rendszerében a nulla csoportot.

Tehát: A nulla csoport minden eleme nemes gáz.

Ahhoz, hogy teljes indukciós következtetést végezzünk, először is pontosan ismerni kell a vizsgált osztályt alkotó egyedek számát. Másodszor, meg kell győződni arról, hogy az általánosított ismertetőjegy ennek az osztálynak minden tárgyában jelen van. Ha e körülmények fennállnak, a teljes indukcióval szükségszerűen igaz zárótételhez jutunk. Ezért ez a következtetés csak iránya szempontjából tartozik az induktív következtetések körébe, nem reduktív következtetés.

A teljes indukció értékét gyakran kétségbevonják azon az alapon, hogy zárótétele nem ad új ismeretet. Ez a vélemény azonban figyelmen kívül hagyja azt a különbséget, amely az általános ítélet és az egyes tárgyakról alkotott ítéletek egyszerű összege között fennáll. A tárgyak valamely osztályáról alkotott általános ítélet, amelyet a teljes indukció zárótételében kapunk, nemcsak az adott osztály minden egyes tárgyáról kapott ismeret összege, hanem az osztály elemeinek mint egésznek az általános jellemzése is, a premisszákban közölt egyes ismeretek sajátos szintézise.

Amikor a teljes indukció zárótétele megmutatja, hogy az osztály összes elemeiben megvan valamely tulajdonság, akkor egyben azt is

állítja, hogy ez a tulajdonság az egész osztály általános ismertetőjegye, amely kapcsolatban van az osztály többi ismertetőjegyével.

A teljes indukció csak abban az esetben alkalmazható, ha az általánosított egyedek száma véges, és az osztály minden egyes tagjának tanulmányozása gyakorlatilag lehetséges. Mivel a tanulmányozandó esetek többségében végtelen számosságú elemekből álló osztályokkal van dolgunk, a teljes indukció alkalmazási köre meglehetősen szűk.

Teljes indukciónak nevezik még — a fent ismertetett következtetési eljáráson kívül — a matematikában a következő formájú következtetést: Ha ismert, hogy valamely F tulajdonság az 1-nek sajátja, és ha n szintén rendelkezik ezen F tulajdonsággal, akkor $n+1$ is rendelkezik vele, ez esetben következtetni lehet arra, hogy F tulajdonsága minden számnak. Ez az ún. *matematikai teljes indukció* a logikailag szükségszerű következtetések közé tartozik.

2.2. A NEM-TELJES INDUKCIÓ

A nem-teljes indukció sajátossága, hogy az előzményekben megállapítottakhoz képest a következmény a tárgyak nagyobb körére vonatkozóan tartalmaz állítást. A nem-teljes indukcióban valamely osztály bizonyos számú (de nem az összes) eleméről szerzett ismeretet általánosítjuk, kiterjesztjük az osztály elemeinek egészére. A nem-teljes induktív következtetések között különbség van valószínűségük szempontjából. A legkevésbé megalapozott az ún. *egyszerű felsoroláson alapuló indukció*. Ezt az indukciót más néven népszerű indukciónak is nevezik. A következtetés alapja itt gyakran csak annyi, hogy egy és ugyanazon jelenséget számos esetben megfigyeltek, és nem tudnak egyetlen ennek ellentmondó esetről sem.

A logikatankönyvek közkedvelt példája erre az európai embernek az a következtetése, amikor megfigyelve azt, hogy a hattyúk tollazata fehér, induktív úton arra következtetett, hogy „Minden hattyú fehér". Ámde Ausztrália felfedezése után kiderült, hogy fekete hattyúk is vannak, és ezzel bebizonyosodott ennek az induktív következtetésnek a helytelensége.

Az egyszerű felsoroláson alapuló indukciót a tudományban csak mint feltevést lehet elfogadni, amely még további bizonyítást igényel. Mint ilyen jogos eljárás. Ugyanis a jelenségek tanulmányozásának kezdeti fokán távolról sem mindig lehet elégséges alapot találni a tudományos általánosításhoz, az általánosítás pedig, hacsak feltevés formájában is, ezen a fokon is szükséges a további tudományos kutatáshoz.

A tudományos hipotézisek keletkezésében az egyszerű felsoroláson alapuló indukciónak nagy szerepe van.

Az egyszerű felsoroláson alapuló indukció rendszerint *kvantitatív* indukció. Ezek valószínűsége fokozható a zárótételt alátámasztó tények felsorolásának növelésével, de az esetek számának növelése nem döntő bizonyító érv. Jóval fontosabb a tények speciális kiválasztása. A *kvalitatív* indukciót az jellemzi, hogy az indukció egyedek olyan sajátosságából indul ki, amely sajátosság ezen egyedeknek mint valamely osztály tagjainak lényeges ismérve. Visszatérve az előző példára, ott az indukció azért nem volt megbízható, mivel a hattyúk osztályának egy lényegtelen sajátossága (fehér tollazat) alapján történt az általánosítás a hattyúk osztályának egészére. Az indukció valószínűségét növeli, ha az indukció az adott osztály tipikus tárgyainak elemzésén alapul, olyanokon, amelyekben a legtisztábban nyilvánulnak meg az osztály számára általános ismertetőjegyek és lényegtelenebbek a sajátos vonások.

Érdekes példa erre vonatkozóan, hogy Marx a kapitalizmus általános sajátosságait Anglia kapitalista fejlődésének tanulmányozásából kiindulva vizsgálta, mivel Anglia volt a tőkés termelőmód klasszikus hazája. Marx maga így ír erről „A tőké"-ben:

„A fizikus a természeti folyamatokat vagy ott figyeli meg, ahol legjellegzetesebb formájukban és zavaró befolyásoktól legkevésbé elhomályosítva jelennek meg, vagy, ahol ez lehetséges, kísérleteket végez olyan feltételek között, amelyek biztosítják a folyamat tiszta lefolyását. Nekem ebben a műben a tőkés termelési módot és az ennek megfelelő termelési és forgalmi viszonyokat kell kutatnom. Ezek klasszikus hona mind ez ideig Anglia."[2]

Megbízható következtetést arról, hogy az adott ismertetőjegy megvan az osztály összes tárgyaiban, akkor vonhatunk le, ha sikerül megállapítanunk, hogy az egyes tárgyakban általunk megfigyelt is-

mertetőjegy szükségszerű kapcsolatban van azokkal az ismertetőjegyekkel, amelyek az osztály összes tárgyaiban közösek.

Szükségszerűen igaz zárótételt az olyan induktív következtetés ad, amelyben az osztály összes tárgyaira vonatkozó általános zárótételt annak ismerete alapján vonjuk le, hogy szükségszerű összefüggés van az általánosított — és általunk egyes tárgyakban megfigyelt ismertetőjegy — és ezeknek a tárgyaknak olyan ismertetőjegyei között, amelyek az egész osztályban közösek.

Például, amikor megfigyeljük, hogy a réz, a vas, a higany jó vezető és megállapítjuk, hogy ezt a tulajdonságot az ezekben az anyagokban levő szabad elektronok okozzák, akkor, mivel tudjuk, hogy a szabad elektronok jelenléte a fémek közös tulajdonsága, szükségszerűen következtethetünk arra, hogy az összes fémek jól vezetik az elektromosságot.

3. AZ ANALOGIKUS KÖVETKEZTETÉS

Az analogikus következtetés szintén olyan következtetési eljárás, amely valószínűen igaz tételhez vezet. Két vagy több tárgy bizonyos ismertetőjegyeinek egyezése alapján következtetünk más ismertetőjegyeik megegyezésére. Sematikusan ábrázolva:

a, *b*, *c*, *d* rendelkezik *P*, *Q*, *R* ismertetőjeggyel,
a, *b*, *c* rendelkezik *Z* ismertetőjeggyel.
Tehát:
d is rendelkezik *Z* ismertetőjeggyel.

Mint a sémából látható, az analogikus következtetés iránya szempontjából nem általánosító következtetés, zárótétele nem általánosabb, mint az előzmény ítéletei.

A mindennapi életben igen gyakori az analógiák alapján történő következtetés. Például, ha meglátjuk a könyvüzlet kirakatában kedvenc szerzőnk új könyvét, azt igyekszünk mielőbb megszerezni és elolvasni. Miért? Mert szerzőnk *x* könyvét szórakoztató, magas művészi értékű stb. olvasmánynak találtuk, ugyanígy vélekedtünk e szerző *y* művéről is. Tehát feltételezzük, hogy ez az általunk még nem ismert *z* műve is hasonló értékekkel rendelkezik.

Nyilvánvaló, hogy ha az analogikus következtetés alapja pusztán az a tény, hogy bizonyos tárgyaknak vannak megegyező ismertetőjegyeik, akkor az ilyen következtetés — hasonlóan a kvantitatív indukcióhoz — nem nyújt megbízható ismeretet. Csak ötletet ad, hipotézist, amelyen elindulhatunk.

Az analogikus következtetések helyességének egyik feltétele, hogy az analógia alapját képező dolgok az adott vonatkozásban lényeges sajátosságaik szempontjából egyezzenek meg. Így pl. bár a Föld és a Hold több ismertetőjegye megegyezik (alakjuk, tengely körüli forgásuk stb.), ez nem ad alapot arra a következtetésre, hogy a Holdon is van élet. Azok az ismertetőjegyek ugyanis, amelyekben megegyeznek, lényegtelenek az élet létezése szempontjából. Az analogikus következtetéseknél nemcsak a megegyező sajátosságokat kell figyelembe venni, hanem a tárgyak közötti különbségeket is. Minél lényegesebb az adott tárgyak közötti különbség, annál kevésbé valószínű az analógia.

A tudomány és az ideológiai harcok történetében gyakran találkozunk kitalált, üres analógiákkal. Hamis és kitalált analógiákra épül pl. az ún. „szociáldarwinizmus" elmélete és más olyan elméletek is, amelyek a biológiai törvényeket akarják kiterjeszteni a társadalmi élet vizsgálatára.

A különböző tudományokban gyakran használnak fel analógiák útján kapott eredményeket. Például a repülőgépgyártásban, a hajóépítésben, különböző vízi erőművek építésénél stb. Itt az analógiát az ún. *modellezésben* használják fel. Mielőtt valamilyen objektumot létrehoznak, előbb megépítik modelljét és megfelelő körülmények között kipróbálják. A modell kipróbálásánál kapott adatokat kiterjesztik az objektumra, mivel a modell az adott szempontból az összes lényeges ismertetőjegyében megegyezik az objektummal. Alkalmazzák a modelleket az űrhajós pilóták kiképzésénél is. Az űrpilóták részére itt a földön az űrutazáshoz analóg feltételeket teremtenek és ezek hatásának vizsgálatából következtetéseket vonnak le az űrkabin szükséges berendezésére, a pilóta ellenállóképességére stb. vonatkozóan.

Széleskörűen alkalmazzák az analógiás következtetéseket a XX. század nagy gyakorlati vívmányainál, az ún. „gondolkodógépek" megalkotásánál. Az emberi gondolkodás fiziológiai és

logikai folyamatának vizsgálatából kiindulva analogikus következtetések bonyolult sorozatán át jutottak el a tudósok e gépek számos technikai problémájának megoldásához. Így pl. az emberi agy felépítésének a vizsgálatából jutottak el arra a következtetésre, hogy a gépeket is ún. „memória-egységgel" lássák el, amelyekben tárolják a továbbiakban szükséges, de a munka nem minden folyamatában felhasználásra kerülő adatokat. Továbbá ezen analógiák „megfordításaként", a gépek működési feltételeinek tanulmányozása alapján, analogikus következtetéseket vonhatunk le az emberi agy működésére vonatkozóan is. Természetesen a „gondolkodógépek" és az emberi agy működésében az azonos vonásokon kívül különbségek is vannak. Az emberi agy működése magasabb rendű mozgásforma, mint akár a legtökéletesebb elektronikus számológép mozgása. De a magasabb rendű mozgásforma tanulmányozásából levont analogikus következtetések hozzásegítettek e „gondolkodógépek" megszerkesztéséhez. Analogikus következtetések tették lehetővé továbbá a különböző mozgásformák esetében egyaránt érvényes vezérlési törvények felismerését és így egy új tudomány, a kibernetika létrejöttét.

VII. A LOGIKAI TÖRVÉNYEKRŐL

A „logikai törvény" fogalom terjedelmén belül több fajtát különböztetünk meg: 1. A logikai rendszerek felépítésének, általában a logikus gondolkodásnak az alapfeltételeit képező törvények. 2. Adott logikai rendszer törvénye. 3. A valóság dialektikus mozgástörvényeiből közvetlenül következő gondolkodástörvények, a dialektikus módszer törvényei.

E törvénycsoportok közül az első két csoporttal és ezeknek a dialektika törvényeihez való viszonyával fogunk a továbbiakban megismerkedni.

1. A FORMÁLIS LOGIKA ALAPTÖRVÉNYEI ÉS VISZONYUK A DIALEKTIKUS GONDOLKODÁSHOZ

A formális logika alaptörvényei a fogalmak és ítéletek általános sajátosságaiból, a gondolatformák specifikus jellegéből következnek. E törvények minden logikailag helyes gondolkodási folyamatban hatnak, az emberi gondolkodás természettörvényei. Mindaddig e törvények szerint gondolkodunk és fogunk gondolkodni, amíg a gondolkodás természete — a fogalmak, ítéletek sajátosságai — a mai ember gondolkodási apparátusával lényegében megegyező sajátosságokkal rendelkezik.[1] Az alaptörvények a gondolkodás következetességének, határozottságának és meggyőző voltának legáltalánosabb feltételei.

Tudjuk, hogy a logika logikai rendszerek sokaságát foglalja magába, hogy adott logikai rendszernek vannak axiómái, és különböző

logikai rendszerek abban térhetnek el egymástól, hogy axiómáik mások, vagy az egyik rendszer mint tágabb rendszer magában foglal egy másik rendszert. A formális logika alaptörvényei nem azonosak valamely logikai rendszer axiómáival. *Ezek a törvények a gondolati tevékenység törvényei, a legáltalánosabb olyan metalogikai törvények, amelyek biztosítják a fogalmakkal és ítéletekkel végzett gondolati operációk helyességét.*

1.1. AZ AZONOSSÁG TÖRVÉNYE

AZ AZONOSSÁG TÖRVÉNYÉNEK LÉNYEGE

A megismerő gondolkodás egyik alapja a fogalomalkotás. A fogalmak segítségével feltárhatjuk a dolgok sokoldalúságát. Így pl. a víz többek között általánosítható a „vegyileg összetett anyag", „hidrogénből és oxigénből álló vegyület", „folyadék", „rugalmas test" stb. fogalmakban. De ezek a fogalmak csak azért nyújtanak ismeretet a vízről, mert az ismertetőjegyek meghatározott köre alapján alkottuk meg őket, mert megkülönböztetjük őket összes többi fogalmainktól.

Ahhoz, hogy a valóságot megismerhessük, hogy fogalmakban tükrözni tudjuk, fogalmainknak határozottaknak, vagyis adott gondolatmenetben azonos tartalmúnak kell lenniük. A gondolkodásnak ezt az elemi követelményét fejezi ki a formális logika azonosságtörvénye.

AZ AZONOSSÁG TÖRVÉNYE A LOGIKA TÖRTÉNETÉBEN

Az azonosság törvényét szabatos formában először Arisztotelész fogalmazta meg:

„. . . .ha egy szó (a „szó" Arisztotelesznél azonos jelentésű a fogalommal — H. K.) nem egy meghatározott dolgot jelent, akkor nem jelent semmit. Ha pedig a szavak nem jelentenének semmit, akkor

megsemmisülne az emberek egymással való beszélgetése, s igazság szerint az önmagukkal való beszélgetés is: *Lehetetlen ugyanis gondolkozni, ha nem gondolunk valami határozott egyet — ha pedig egyet gondolunk, akkor ennek az egy dolognak egy nevet is adunk*".[2] (Kiemelés tőlem. — H. K.)

Arisztotelész ezt a tételt a szofista-relativista filozófiai irányzat ellen fogalmazta meg. A szofisták szerint fogalmainkban nem lehet semmiféle állandóság. Éppen ezért lehetetlen eldönteni valamely ítélet igazságát vagy hamisságát, mert minden attól függ, hogy milyen jelentést tulajdonítunk az ítéletben szereplő terminusoknak. Szerintük a fogalmaknak nincs határozott tartalmuk, hanem egyszer ez, máskor pedig amaz egy fogalom — és ennek alapján az ítélet — tartalma. A szofisták nem ismerik el a dolgok semmiféle azonosságát. Az ilyen felfogás minden esetben a világ megismerhetőségének tagadásához vezet, mivel a világ megismerése határozott fogalmak nélkül lehetetlen. Arisztotelész tehát a világ megismerhetőségéért, a tudományok előbbreviteléért harcolt, amikor a fogalmak határozottságát követelte, és megfogalmazta a formális logika azonosság törvényét.

A logika történetének további szakaszaiban eltértek e törvény arisztotelészi értelmétől. Azonosság törvényen különböző valóságos és vélt törvényeket értettek. E különböző értelmezések némelyikével tanulságos lesz megismerkednünk a formális logikai törvények jellegének megértése szempontjából is.

Az azonosság törvényén gyakran a *dolgok* azonosságának törvényét értik.

A valóság tárgyai állandó fejlődésben, változásban vannak. Ez a fejlődés, változás folyamata az állandóság és a változás egységében valósul meg. A dolgok fejlődésük ellenére is viszonylag tartósan megőrzik bizonyos tulajdonságaikat, éppen ezért minden egyes konkrét dolog azonos is előző önmagával és más is. Azonos, amennyiben változása ellenére „az a változó dolog" maradt, és más is, mivel megváltozott bizonyos sajátosságait illetően. „Kovács Péter egyetemi hallgató" azonos Kovács Péterrel, a középiskolai matematikai tanulmányi verseny győztesével. Mennyiben azonos? Abban, hogy Kovács Péter az eltelt egy év alatt, amíg középiskolásból egyetemi hallgató lett — a sok irányú változás ellenére — mint

egyed azonos maradt önmagával. Természetesen csak *adott vonatkozású* azonosság áll fenn. (Azt mondják a szülők: „Ez a Péter már nem az, aki volt, felnőtt ember lett belőle" stb.) Kovács Péter, mint ugyanaz a személy azonos önmagával, illetve az átalakulás folyamatában megmaradt ennek a változó egyednek.

A fentiekből következőleg a *dolgok* azonosságának törvényét így fogalmazhatjuk meg: Minden dolog, mint „A" sajátosságú dolog azonos önmagával, mindaddig, amíg ezzel a meghatározott „A" ismertetőjeggyel rendelkezik. Ez a törvény természetesen ebben a formájában nem logikai törvény. A valóság általános törvénye, amely minden dologra egyaránt érvényes. Az uránium *mint* uránium azonos önmagával mindaddig, amíg atomfizikai jelenségek következtében nem alakul át ólommá, annak ellenére, hogy az idő alatt is, amíg uránium, változások mentek benne végbe. A H_2O kémiai vegyület H_2O marad, azonos önmagával mindaddig, amíg két rész hidrogént és egy rész oxigént tartalmaz, függetlenül attól, hogy pl. halmazállapotát tekintve már esetleg változás következett be benne, nem azonos önmagával.

A *logikai* azonosság *alaptörvényt* a következő módon fogalmazhatjuk meg: Ha kiválasztottuk gondolkodásunkban „A" egységet gondolkodásunk tárgyaként, akkor a gondolkodás egész folyamatában e tárgyról mint „A" tárgyról gondolkodjunk, vagyis ne cseréljük fel gondolkodásunk tárgyát. Ennek a törvénynek objektív alapja a dolgok azonosságának törvénye. Ne cseréljük fel a gondolkodásban a gondolkodás tárgyaként kiválasztott „A" egységet semmilyen más gondolati tárggyal, mivel „A" egység a valóságban is megőrzi „A" sajátosságot mindaddig, amíg megmarad „A"-nak. *A logika azonosság alaptörvénye a dolgok azonosságából következő speciális logikai törvény, a fogalmak általános használatának törvénye.*

A logika történetében az azonosság alaptörvényének objektív alapját gyakran tévesen értelmezték. Az azonosság törvényét a valóság metafizikus szemléletével hozták kapcsolatba és ezzel elferdítették magát az alaptörvényt is. A logika történetében hosszú időn keresztül a formális logika azonosság törvényének álcázva egy metafizikus tétel szerepelt. Szemben a relativista filozófiával, a filozófusok egy része azt állította, hogy a természetben és a tár-

sadalomban minden állandóan azonos önmagával, vagy ahogy megfogalmazták: „minden dolog az, ami".

A metafizikus felfogás a fogalmak azonosságát a dolgok önmagukkal való *állandó* azonosságából vezeti le. Az azonosság alaptörvény azonban — ha helyesen értelmezzük — semmi kapcsolatban nincs a dolgok állandó azonosságának feltételezésével. Az azonosság törvénye nem tiltja a különböző dolgoknak meghatározott vonatkozásban való azonosítását, és az azonos dolgokban levő különböző, sőt ellentétes oldalak feltárását, hanem segíti ezt. Menynyiben? Világítsuk meg ezt egy példával. Amikor a tudósok az uránium elemet vizsgálják, nem az érdekli őket, hogy az uránium = uránium (tehát az, ami), hanem az, hogy az uránium mint elem azonosságán belül milyen különbözőségek vannak (pl. izotópjaik kémiai reakciójukat tekintve azonosak, atomreakciójukat tekintve különbözőek). A metafizika elve azzal, hogy azt állítja: minden dolog azonos önmagával (vagyis az uránium = uránium), semmivel sem segíti a kutatók munkáját. A formális logika azonosság törvénye viszont szükséges feltétele a kutatásnak, mivel ahhoz, hogy az uránium sajátosságait feltárhassuk, szükséges megalkotni az „uránium" fogalmát, amelyet — az azonosság törvényének megfelelően — a gondolkodás folyamatában nem szabad felcserélni semmiféle más fogalommal. Ez a határozott fogalom eszközül szolgál az uránium sajátosságainak feltárásánál. Másrészt az uránium fogalma, mely kezdetben csak arra adott választ, hogy milyen tárgyakat tartsunk szem előtt vizsgálódásaink folyamán, az uránium sajátosságainak feltárásával állandóan gazdagodik, mélyebb tartalommal telítődik.

A formális logika azonosság törvénye, ha megtisztítjuk a metafizika torzításaitól, valóban hasznos, az élő gondolkodás törvénye, lehetőséget teremt a valóság dialektikus megismeréséhez.

Az azonosság törvénye nem mond ellent a dialektika törvényeinek.[3] A formális logika azonosság törvénye az objektív világ folyamatai és jelenségei megismerésében szükséges követelmény. Betartása biztosítja, hogy gondolkodásunk meghatározott tárgyakra összpontosuljon, ne veszítsük ezeket szem elől a gondolkodás folyamatában, és ne térjünk át — anélkül, hogy ezzel tudatosan számolnánk — valamilyen más tárgy vizsgálatára.

Az azonosság törvényének megsértése a fogalmak felcserélésének hibájához vezet. Ha a gondolkodás folyamatában egy fogalom helyett más fogalmat használunk, ennek következményeképpen felcserélődik a gondolkodás tárgya. Néha az ember, esetleg önmaga számára is észrevétlenül, miután elkezdett gondolkodni egy dologról, áttér egy másik dologra és azt ugyanannak tartja. Ez a gondolkodás eltévelyedéséhez vezet, ahhoz, hogy a kimondott tételek nem egyeznek egymással, sőt, ellentmondanak egymásnak, mivel egynek tartott, de valójában különböző tárgyakra vonatkoznak.

Sokszor előfordul pl., hogy az emberek vitatkoznak valamely kérdésről, és csak a vitában derül ki, hogy tulajdonképpen félreértésről van szó, amelynek oka az, hogy a vitatkozó felek nem azonos fogalmi tartalommal használták egy és ugyanazt a nyelvi kifejezést. Ilyen esetekben az elkövetett logikai hiba feltárása segít a vitát megoldani.

Természetesen előfordulhat, hogy a fogalmak felcserélésének hibáját nem a gondolkodás tárgyának tisztázatlansága vagy a nyelvi kifejezések pontatlan használata eredményezi, hanem alapja a szándékos eltérés az igazságtól, a tudatos megtévesztés.

1.2. AZ ELLENTMONDÁS TÖRVÉNYE

Minden ítélet állítást tartalmaz. Ahhoz, hogy az állítás előbbre vigye a megismerést, az szükséges, hogy egyik ítéletünk ne tagadja azt, amit a másik ítélet igazként állít. A helyes gondolkodásnak ezt a feltételét az ellentmondás törvénye fejezi ki. *E törvény szerint logikai ellentmondás valamit állítani, és ugyanennek az ellenkezőjét állítani.*

Ez elemi, de szükséges követelmény ítéleteinkkel szemben, mert ha valamit igaznak állítunk és állításunkat fenntartva, ezt az állítást ugyanakkor tagadnánk is, akkor egyik állításunk megsemmisítené a másikat és ennek következtében nem jutnánk semmiféle ismerethez. Logikai ellentmondás lép fel pl. akkor, ha valaki azt állítja, hogy S tárgy beletartozik P osztályba, és ugyanezt tagadja is, vagyis tagadja hogy S beletartozik P osztályba.

A formális logika ellentmondás törvényének megsértése rendszerint nem nyílt ellentmondásként fordul elő. A burkolt megsértésnek igen sok típusa lehet. Néhányat megemlítünk ezek közül.

Gyakran előfordul, hogy valaki állít valamit erről vagy arról a tárgyról, és ugyanakkor valami mást is állít, ami az első állításával összeegyeztethetetlen. Ha valaki pl. azt állítja, hogy „az atom az anyag legkisebb része", és ugyanakkor azt is állítja, hogy „az atom kisebb részekből tevődik össze", ezzel ellentmond saját magának.

Az olyan ítéletek esetében, amikor valaki állít valamit és ezzel ellentmondó ítéletet is állít (adott esetben, ha a két ítélet a következő lenne: „az atom az anyag legkisebb része", „az atom az anyagnak nem a legkisebb része"), közvetlenül az ellentmondás törvényére lehet támaszkodni. Az olyan ítéleteknél viszont, ahol az egyik tétel állít valamit, a másik meg közvetve tagadja ezt az állítást („az atom az anyag legkisebb része", „az atom kisebb részekből tevődik össze"), az ellentmondás törvényének megsértését csak akkor tudjuk kimutatni, ha előzőleg megállapítottuk a kimondott ítéletek összeegyeztethetetlenségét. Általánosan a következőképpen lehet ezt kifejezni:

„p" és „q" ítéleteknél az ellentmondás törvényére támaszkodva az egyik ítélet nem-igaz, ha q ítéletet vissza lehet vezetni a „nem áll fenn az, hogy p" ítéletre.

A tudományok fejlődése során előfordul, hogy a tudósok olyan jelenségekre bukkannak, amelyek az előző tapasztalatoknak ellentmondanak. Ilyen esetekben el kell dönteni, hogy a régi és az új ismeretek mint összeegyeztethetetlenek viszonylanak-e egymáshoz, és így az ellentmondás törvénye alapján valamelyik állítást el kell vetni, vagy pedig a vizsgált jelenség új oldala, eddig nem ismert vonása tárult fel, a dolog belső ellentmondásos természetére derült fény. Például a tudósok hosszú ideig azt tartották, hogy a fény korpuszkuláris természetű. Később megfigyeltek olyan jelenségeket, ahol a fény hullámként viselkedett. El kellett dönteni, milyen is valójában a fény: korpuszkuláris vagy hullám természetű. A tudósok arra a megállapításra jutottak, hogy a fény korpuszkuláris és hullám természetű is. Sokan azt hitték, hogy ez megcáfolja a logika ellentmondás törvényét. A valóságban nem így van. Az új

felfogás, mely szerint a fénynek korpuszkuláris és hullám természete is van, nem azt bizonyítja, hogy a fényről azt is lehet állítani, hogy hullámszerűen viselkedik, egy másik ítéletben pedig azt is, hogy a fénynek nincs meg az a tulajdonsága, hogy hullámszerűen viselkedik. Az új ismeretek azt igazolják, hogy a fénynek nincs olyan tulajdonsága, hogy vagy „hullám", vagy hogy „korpuszkula", hanem a fény a „hullám-korpuszkula" vagy „korpuszkula-hullám", bonyolult tulajdonsággal rendelkezik. Az ellentmondás törvénye tehát adott esetben nincs megsértve. Csak akkor lenne megsértve, ha kimutatták volna, hogy „hullámnak lenni" a fény esetében is azt jelenti, hogy nincs korpuszkuláris természete, vagy, ha a korpuszkuláról a fénynél is kimutatható lenne, hogy egyet jelent azzal, hogy a fénynek nincs hullámtermészete. Ez esetben a helyzet a következő lenne: van két ítéletünk

1. „a fény korpuszkuláris természetű",
2. „a fény hullám természetű"

(hullám természet = nem-korpuszkuláris természet), tehát a két ítélet közül az egyiket feltétlenül el kell vetni.

A valóságban azonban nem lehet bebizonyítani, hogy a hullám ez esetben nem-korpuszkula, sem hogy a korpuszkula nem-hullám, ezért itt nincs megsértve az ellentmondás törvénye, és a tudomány a következő ítéletet hozza: „A fény hullám-korpuszkula (korpuszkula-hullám) természetű". Az ellentmondás törvényének a megsértése itt az lenne, ha azt is állítanánk: „Nem igaz, hogy a fény hullám-korpuszkula (korpuszkula-hullám) természetű".

AZ ELLENTMONDÁS TÖRVÉNYE METAFIZIKUS FELFOGÁSÁNAK BÍRÁLATA

Az ellentmondás törvényét először Arisztotelész fogalmazta meg. Arisztotelész ezt a törvényt is a korabeli relativista-szofista felfogásokkal állította szembe. E nézetek szerint ugyanis mindent mindenről lehet állítani is és tagadni is.

Ezekkel a nézetekkel szemben írja Arisztotelész:

„...lehetetlen, hogy egy és ugyanaz az állítmány egy és ugyanazon alanyhoz egyszerre és ugyanazon vonatkozásban — s hogy a

logikai ellenvetéseket kikerüljük, tételezzük fel, hogy a többi szükséges határozmányokat is megjelöljük itt — hozzá is tartozzék, meg ne is".[4]

Arisztotelész több esetben visszatér e gondolatra. Többször kevésbé pontosan fogalmaz. Ez is hozzájárult ahhoz, hogy Arisztotelészre hivatkozva — lényegében gondolatát elferdítve — a formális logika ellentmondás törvénye összekeveredett a metafizika egyik elvével.

A metafizikus gondolkodás nem ismeri el a dolgok belső ellentmondásait, azt, hogy egy dolognak különböző, gyakran ellentmondó tulajdonságai, összefüggései, kapcsolatai lehetnek. A metafizikus gondolkodás nem tudja megérteni a dolgok ellentmondásos voltát, ezért tagadja a valóság ellentmondásait.

A formális logika nem állítja azt, hogy a dolgoknak nem lehetnek ellentmondó tulajdonságai, és hogy a dolgok ellentmondó tulajdonságairól nem lehet ítéleteket alkotni.

A formális logika törvényeinek a metafizika tételeivel való összekeveréséből keletkezett az a felfogás, amely a formális logikai törvények alkalmazhatóságának külön területéről beszélt, és hogy ezek a törvények a hétköznapi életben, felületes vizsgálatnál alkalmazhatók, de mélyebb összefüggések kutatásánál fel kell hogy váltsa őket a dialektika törvényeinek alkalmazása. Ez a felfogás teljesen helytelen.[5]

Az ellentmondás törvényét gyakran a következő módon fogalmazzák meg: Ha a „Minden *S*—*P*" ítéletet állítottuk, akkor nem állíthatjuk *ugyanabban a vonatkozásban* a „Minden *S*—nem-*P*" ítéletet is. Ebben az esetben a törvény objektív alapjának azt tekintik, hogy a valóságban sem lehet, hogy *S* tárgy *ugyanabban a vonatkozásban*, amelyben rendelkezik *P* ismertetőjeggyel, rendelkezzen nem-*P* ismertetőjeggyel is. Eszerint a dialektikus ellentmondás azt jelenti, hogy az adott dolog *különböző vonatkozásokban* rendelkezik ellentmondó sajátosságokkal. A logikai ellentmondás törvénye — állítja ez a felfogás — nem tiltja, hogy egy tárgyról különböző vonatkozásokban ellentmondó ítéleteket állítsunk, csak az ugyanabban a vonatkozásban ellentmondó ítéletek állítását tiltja, tehát nincs ellentétben a dialektikus ellentmondással.

Az ugyanabban a vonatkozásban fennálló ellentmondás („S" ugyanabban a vonatkozásban „*P*" és „nem-*P*") meglétéből többen azt a következtetést vonják le, hogy az ilyen, dialektikus ellentmondás esetében a formális logika ellentmondás törvényével ellentétesen kell gondolkodnunk. Valójában a formális logika ellentmondástörvénye nem tagadja annak lehetőségét, hogy egy tárgy ugyanabban a vonatkozásban rendelkezzen *P* és nem-*P* ismertetőjeggyel is. Csak azt tiltja, hogy ha már *állítottuk*, hogy rendelkezik *P* ismertetőjeggyel, állítsuk azt is, hogy *nem rendelkezik* a „*P*" jeggyel, illetve tiltja, hogy mindkét állítást igaznak fogadjuk el.

Bonyolult jelenségek kutatásánál a pontosság hiánya, vagy egyes fogalmak nem tisztázott tartalma, vagy hiányos ismeretek következtében gyakran keletkeznek logikai ellentmondások. Így pl. a fizikában, amikor a tudósok megpróbálták megállapítani a feltételezett éterközeg mechanikai sajátosságait, amelyben a fényhullámok terjednek, a különböző kutatások és elmélkedések nyilvánvaló ellentmondáshoz vezették a tudósokat. Egyes adatok arról tanúskodtak, hogy az éter rugalmas anyag, más adatok azt mutatták, hogy az éteren szabadon hatolhat át bármely test, amit összeegyeztethetetlennek tartottak a rugalmas anyagról alkotott elképzeléssel. Ilyen esetben az ellentmondás törvénye arra hívja fel a figyelmet, hogy nem fogadhatunk el ellentmondó eredményeket, és tovább kell kutatni, míg a keletkezett ellentmondás megoldódik.

Ha logikai ellentmondásba ütközünk, ez azt jelenti, hogy valamit nem vettünk számításba. Lehetséges, hogy a tárgy azért viselkedik ellentmondóan, mert különböző összefüggésekben, különböző feltételek között vizsgáltuk, és ezt nem vettük számításba. Lehetséges, hogy fogalmaink pontatlansága következtében fogalomcsere történt, és ennek eredményeképpen azokban az ítéletekben, amelyek ellentmondásosaknak tűnnek, különböző dolgokról van szó. Lehetséges az is, hogy az, ami nekünk a valóságban összeegyeztethetetlennek és ezért logikai ellentmondásnak tűnik, magának a valóságnak az ellentmondása, amelyet még nem tudtunk megmagyarázni stb.

Ismereteink ellentmondások keletkezése és megoldása útján fejlődnek. Az ellentmondás törvénye nem tagadja az ellentmondások keletkezését a megismerés folyamatában, hanem megoldásukat

követeli, amennyiben a logikai ellentmondások megléte mindig a kérdés megoldatlanságáról, ismereteink pontatlanságáról tanúskodik.

1.3. A KIZÁRT HARMADIK TÖRVÉNYE

Az ellentmondás és a kizárt harmadik törvénye az állítás és tagadás közötti viszony két különböző oldalát fejezi ki. Míg az ellentmondás törvénye arra mutat rá, hogy ugyanannak az állítása és tagadása összeegyeztethetetlen, a kizárt harmadik törvénye szerint az ellentmondó ítéletek közül az egyiket igaznak kell elfogadnunk. Arisztotelész ezt a törvényt a következőképp fogalmazta meg: ugyanannak állítása és tagadása között nem lehet semmiféle harmadik.

„Minden tudományt a haladás érdekébe kell állítani" és „Némely tudományt nem kell a haladás érdekébe állítani". Ebből az ítéletpárból valamelyik ítélet feltétlenül igaz, és nem lehet valahol a kettő között keresni az igazságot.

A kizárt harmadik törvénye először is ítéleteink határozottságának követelményét fejezi ki. Minden tárgyról határozott ítéletet kell mondanunk, akár állítjuk, akár tagadjuk valamilyen tulajdonságának meglétét. Továbbá, ez a törvény ítéleteink következetességének követelményét fejezi ki. Ennek a követelménynek a teljesítése nélkül lehetetlen maga a gondolkodás, lehetetlen a megismerés. E törvénynek fontos szerepe van több logikai művelet elvégzésénél. Ez az alapja pl. az ellenkezőjével való bizonyításnak is, amelyet széleskörűen alkalmaznak a tudományokban.

Mivel az ellentmondás törvényét és a kizárt harmadik törvényét a logika történetében gyakran helytelenül, mint egy törvényt értelmezték, vagy mint olyan két törvényt, ahol az egyik törvény részben megismétli a másikat, szükséges összefoglalni a két törvény közötti lényeges különbséget.

Elsősorban elvileg le kell szögezni, hogy egyetlen tudományos törvény sem korlátozódhat más törvények puszta ismétlésére, így nem lenne alapja a két törvény megkülönböztetésének. Az ellentmondás és a kizárt harmadik törvénye más-más összefüggések kifejezői.

Az ellentmondás törvénye azt állapítja meg, hogy nem megengedhető a logikai ellentmondás fenntartása, vagyis két ellentmondó ítélet közül az egyiket feltétlenül el kell vetni, de nem mond semmit arról, hogy a másik ítélet igaz-e vagy sem.

A kizárt harmadik törvénye csak ellentmondó ítéletekre alkalmazható. Nem lehet kiterjeszteni értelmét bármely két összeegyeztethetetlen ítéletre, mint azt az ellentmondás törvényénél tettük. Pl. „Minden diák kitűnően felkészült a vizsgára", „Egyetlen diák sem volt, akinek a vizsgafelkészülésében ne lettek volna hiányosságok" ítéletek logikailag összeegyeztethetetlenek (nem lehet mindkettő igaz), de a kizárt harmadik törvénye e két ítélettel kapcsolatban nem alkalmazható, mivel lehet mindkettő hamis. A kizárt harmadik törvénye azt állítja, hogy ellentmondó ítéletek közül az egyik feltétlenül igaz, de nem állít semmit arról, hogy a másik ítélet igaz-e vagy sem.

Az ellentmondás és a kizárt harmadik alaptörvényeket meg kell különböztetni a kétértékű logika *speciális* felépítési elveitől. A kétértékű logikákban minden ítélet vagy igaz, vagy hamis, más igazságérték nem lehetséges. A formális logikai alaptörvények nem azt a követelményt támasztják, hogy válasszunk az „igaz" és a „hamis" értékek közül, hanem azt, ha egy ítéletnek valamely logikai értéket tulajdonítottunk, ne tulajdonítsunk ennek ellentmondó logikai értéket is. Illetve minden ítéletnek a rendszerben megadott értékek valamelyikével rendelkeznie kell.[6]

2. A LOGIKAI RENDSZEREK TÖRVÉNYEI

A matematikai logikai formális rendszerekben logikai törvényeknek a rendszer mindig-igaz kijelentéseit nevezzük. Így pl. a kijelentéslogikában $p \rightarrow p$, $p \vee \bar{p}$, $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$ stb. formulák logikai törvények formulái. Ezek olyan állítások, amelyek nem a valóság valamely részterületére vonatkoznak, hanem bármely minőségi meghatározottságra, amely gondolkodásunk tárgya lehet. Így pl. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ mindig-igaz formula $(p \vee q)$ objektív viszonyát

fejezi ki $(q \vee p)$-hez. E törvény feltárása azonban nem a valóságról közölt *tény* megállapítása szempontjából fontos. A mindig-igaz kifejezések tautológiák, önmagukban nincs információ értékük. (Bármely a valóság törvényeit feltárni szándékozó tudományos műből a lektor joggal húzza ki a tautologikus ítéleteket, mint felesleges közléseket.) A mindig-igaz ítéletek — a logikai rendszerek törvényei — csak a logikai rendszerben értékes kijelentések. Értéküket az adja meg, hogy belőlük más tételekkel összekapcsolva új tételek vezethetők le, továbbá, hogy következtetési lehetőségekre való utalást tartalmaznak. Így a fenti példa esetében $(p \vee q) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (q \vee p)$ rámutat a kölcsönös következtetés lehetőségére $(p \vee q)$ és $(q \vee p)$ között. A logikai rendszerek törvényei tehát annyiban gondolkodástörvények, minthogy a megismerés területén töltenek be meghatározott szerepet.

A mindig-igaz formulákat (a matematikai logikai formális rendszerek törvényeit) a kijelentések logikájában olyan formulákként definiáltuk, amelyek függetlenül attól, hogy a bennük szereplő változóknak igaz vagy hamis a logikai értéke, az igaz értéket veszik fel. Ez a definíció azonban feltételezi, hogy az ítélet két lehetséges érték (igaz, illetve hamis) valamelyikével rendelkezik. Amíg a logika csak kétértékű logikákból állt, megalapozottnak tűnhetett, hogy a kétértékű logika törvényei minden lehetséges esetben igazak. Ma már azonban vannak olyan logikai rendszerek, ahol az ítéletek kettőnél több logikai érték valamelyikét vehetik fel. E rendszerekben a kétértékű logika mindig-igaz formulái közül némelyek (hogy melyek, az a kiépített új rendszer sajátosságaitól függ) nem mindig-igaz kifejezések. Ebből az következik, hogy a logikai rendszerek törvényei sem olyan törvények, amelyek minden feltétel nélküli törvények. A „törvény" kategóriájára általánosan jellemző sajátosság — vagyis hogy minden törvény meghatározott feltételek törvénye — érvényes a logikai rendszerek törvényeire is.

Milyen viszonyban vannak egymással a különböző logikai rendszerek törvényei?

A többértékű logikák létjogosultságát Brouwernek az a felismerése alapozta meg, hogy a két értékkel történő operálás a matematikában csak ott lehetséges korlátlanul, ahol véges rendszerekkel van dolgunk. Brouwer szerint az ítéletek igaz és hamis értékéről

beszélni csak ott van értelme, ahol ezek az értékek ellenőrizhetők, eldönthetők. Ha nincs mód az ítélet igazságának megállapítására, akkor az ítélet meghatározhatatlan és ez maga már egy harmadik érték. Vegyük példának a következő állítást: „Minden egynél nagyobb egész szám vagy prímszám, vagy két prímszám összege, vagy három prímszám összege". Nem ismeretes, hogy ez így van-e vagy sem, bár minden megvizsgált esetben (a megvizsgált esetek száma szükségképpen véges, míg az egész számok sora végtelen) ez így van. Nem tudunk olyan számot előállítani, amely fenti állításunkat megcáfolná, de azt sem tudjuk bizonyítani, hogy nem lété*zhet* az állítást megcáfoló szám. Ebből adódik, hogy a fenti állításhoz sem az igaz, sem a hamis értéket nem értelmes hozzárendelni.

A kétértékű logika igazságértékeivel nem jellemezhető állítások keletkeznek a mikrovilág objektumainak tanulmányozásakor is. Itt ugyanis megfogalmazódnak olyan állítások, amelyeknek igaz értéket tulajdonítva, az ítélet negációjának igazságértéke eldönthetetlen. E tényből kiindulva kialakult az a nézet, hogy a mikrovilág sajátosságaira vonatkozó állítások esetében nem alkalmazhatók a kétértékű logika törvényei, ill. logikát kell változtatni: a kétértékű logika *helyett* többértékű logika felhasználására van szükség.[7]

A kétértékű és a többértékű logikák törvényeinek összevetésekor rendszerint az euklideszi és a Bolyai—Lobacsevszkij geometria viszonyára hivatkoznak. E nézet szerint az, amit Eukleidész igaznak hitt, éppen úgy tévedésnek bizonyul, mint az, amit a kétértékű logika abszolút igaznak gondol.[8] A kétértékű logika és az euklideszi geometria tételei tágabb összefüggésben elvesztik érvényességüket.

Véleményünk szerint a logikai rendszerek, de a geometriai rendszerek viszonyában sem ez a tényleges helyzet.

Az euklideszi geometriának pl. azt az axiómáját, amely szerint az egyenes két pont közötti legrövidebb távolság, nem érvényteleníti a nem-euklideszi geometria, nem ad az euklideszi geometriával ellentétes értelmet az egyenesnek. Arról van szó, hogy a nem-euklideszi geometriában nem alkalmazható az „egyenes" fogalma, nem pedig arról, hogy itt az euklideszi geometriával ellentétesen kellene meghatározni az egyenes fogalmát.

A logikai rendszerek vonatkozásában a helyzet az, hogy nincsenek egymásnak ellentmondó logikai rendszerek, abban az értelemben, hogy nincs olyan két rendszer, ahol egyikben α mindig-igaz formula, a másikban viszont mindig-hamis lenne. Nincs olyan többértékű rendszer, amelyben a kétértékű logika valamely mindig-igaz formulájának az ellentmondó tétele lenne logikai törvény. A többértékű logika nem teszi hamissá a kétértékű logika törvényeit.

Nem az a tényleges helyzet, hogy vannak egyes valóságterületek, amelyeket visszatükröző ítéletek természete olyan, hogy a kétértékű logika értékkészletében megadott értékek közül valamelyikkel rendelkeznek, és vannak más valóságterületek, amelyekről alkotott ítéleteknek nincs meg ez a természetük.

A valóság *bármely* területéről alkotott ítéletnél az igaz vagy a hamis értékkel történő jellemzés közelítőleges, absztrakció eredménye. Van olyan körülmény, amikor ez az absztrakció megfelelő és van olyan, amikor nem célravezető. Éppen úgy, mint ahogy nincs olyan területe a valóságnak, ahol „egyenes"-ek lennének, míg máshol ezek nincsenek, de bizonyos esetekben az „egyenes" mint absztrakció megfelelő, más feltételnél azonban nem alkalmazható.

Fentiek alapján a logikai rendszerek törvényeiről, ezek egymáshoz való viszonyáról a következőket állapíthatjuk meg: Minden állítás — így minden logikai törvény is — meghatározott $\mathcal{J}$ értelmezési tartományban értelmezett állítás. A logikai rendszerek törvényei esetében ez az értelmezési tartomány nem a valóság bizonyos körülhatárolt területe, hanem meghatározott absztraktságú metszete. A logikai rendszerek törvényeire is igaz, hogy érvényességi körük túlfeszítése esetén nem alkalmazhatók. Az érvényességi kör itt egy metszet, egy absztraktsági fok, egy vizsgálódási sík.

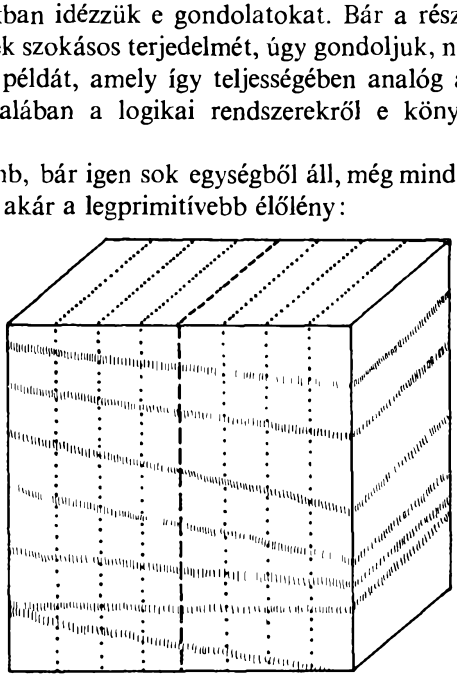
A különböző logikai rendszerek más és más feladatok megvalósítását teszik lehetővé, különböző megismerési célok elérésének eszközei. Hasonló itt a helyzet, mint bármely természettudományos vizsgálódásnál. Ezeknél is különböző eszközök felhasználása egyazon objektum különböző oldalainak, sajátosságainak vizsgálatát teszi lehetővé. Például a hisztológus, aki ezüst-impregnációs eljárással vizsgálja a szívizmot, tisztán látja a szívidegek legparányibb el-

ágazásait is, de nem veheti észre a glikogént, kollégája, aki a Best-féle kárminfestékkel dolgozik, könnyen felfedezi a glikogént, de egyetlen idegvégződést sem lát. Egyik sem tagadása a másik vizsgálódásnak, összesített eredményük adja a szívizomzat titkainak feltárását.

Nincs abszolút igaz törvényekkel rendelkező logikai rendszer, amely a „tények"-nek hű mása. A dolgok struktúrája különböző logikai struktúrákban, egymástól eltérő rendszerekben is leképezhető. Az *ember* viszonylag szabadon létrehozott logikai struktúrákkal dolgozik. Ahogyan a mennyiségi viszonylatok a 10-es és a 2-es számrendszerben is leképezhetők, és egyik sem „igazabb" a másiknál, a különböző logikai rendszerek, ezek törvényei is egyaránt „igaz" megismerési eszközök lehetnek, ha megfelelő módon alkalmazzuk őket és nem feledkezünk meg sajátosságaikról, korlátaikról.

Találó Selye professzor „Az álomtól a felfedezésig" c. könyvének a biológiai kutatások sokrétűségét és egységét bemutató hasonlata. Az alábbiakban idézzük e gondolatokat. Bár a részlet meghaladja az idézetek szokásos terjedelmét, úgy gondoljuk, nem csonkíthattuk meg a példát, amely így teljességében analóg a logikai törvények és általában a logikai rendszerekről e könyvben elmondottakkal.

„Az alábbi tömb, bár igen sok egységből áll, még mindig sokkal egyszerűbb, mint akár a legprimitívebb élőlény:



Amikor a legrégibb kutatók elölről közelítették meg, először csak sík, lapos felületnek látták. Utána kezdetleges műszerekkel sikerült felfedezniük a vastag, szaggatott függőleges vonalat. Amikor világosan megállapították e vonal helyzetét, arra a következtetésre jutottak, hogy a tárgy két függőleges téglalapból áll.

A következő műszer felfedezése — amely észleli a pontozott vonalakat — négy keskeny, függőleges téglalapot mutatott az előzőleg felfedezett egységen belül. Nyilvánvaló lett, hogy a régebbi kutatók tévedtek, s a felület nyolc szimmetrikus elemi részből áll.

Most azonban egy kutató olyan készülékkel vizsgálta meg a felületet, amely csak a durva határvonalakat mutatja. Egyetértett elődeivel abban, hogy a felület valóban nyolc részből áll, de úgy vélte, hogy ezek az egységek nagyon egyenetlenek, és mindenesetre többé-kevésbé vízszintesen rendeződnek. Meglehetősen zavarba ejtették őt a részben eltérő nézetek.

Később, amikor már megfelelő eszközök voltak a mélységi kutatáshoz, mind a szaggatott vonalak detektoraival, mind a pontozott vonalak detektoraival dolgozó kutatók arra a véleményre jutottak, hogy a struktúra nyolc függőleges, azonos lemezből áll. A haránt-vonalak detektorával dolgozó kutató azonban még mindig ragaszkodott ahhoz, hogy a tömb nyolc egyenlőtlen és lényegében vízszintesen elrendezett részből áll.

Később mindezeknek a nézeteknek részletekbe menő verifikálása megmutatta, hogy egyáltalán nem beszélhetünk egységekről, mert a vonalak meg vannak szakítva, és ezért az állítólag különálló részek határainál levő anyagot pontosan nem is lehet osztályozni.

Fölösleges folytatnom a bonyolult történetet. Világosan mutatja, hogy más és más képet alkotunk ugyanarról a tárgyról aszerint, hogy milyen szemszögből és milyen műszerekkel (vagy érzékszervekkel) vizsgáljuk. Ugyanazt a kockát különféle egységekből állónak tekinthetjük; ezek az egységek átfedik egymást, de egyik sem „igazabb", mint a másik. Valamennyi igaz eleme a tömbnek. Sőt bármilyen hasonló esetben a további kutatás kétségkívül kimutatná, hogy még jobb műszerekkel az eddig leírt legkisebb egységen belül is felfedhetők még kisebb alegységek. Másfelől az egész tömb — akárcsak a tégla a ház falában — csupán egy egység a még

nagyobb rendszeren belül, amely csak úgy észlelhető, ha körvonalait nagyobb távolságból, mindennemű nagyítás nélkül vizsgáljuk.

A történetnek az a tanulsága, hogy *több, látszólag össze nem egyeztethető elmélet egyidejűleg helyes lehet.* A tömb nem egyenlőtlen ferde lemezekből vagy egyenlő függőleges lemezekből, hanem egyenlőtlen, ferde és egyenlő, függőleges lemezekből áll.

Azt is látjuk, hogy *valamennyi egység átfedi egymást:* a függőleges lemezeket ugyanaz az anyag alkotja, mint a ferde lemezeket, következésképpen egy-egy molekulája semmivel sem tartozik inkább ehhez, mint ahhoz a lemezrendszerhez.

Látjuk továbbá, hogy *a lényegtelen mozzanatok elfedik a szabályosságokat:* amikor a ferde lemezek lerendeződésének törvényét próbáljuk felfedezni, s munka közben letérünk erről az útról, és a pontozott vonalakra kezdünk figyelni, tévútra jutunk.

Valamennyi látszólag egymásnak ellentmondó korábbi elmélet helyes volt; a végső megfogalmazás tisztaságát csak a szembesítésük biztosíthatja. Minél több kapcsolatot létesítünk, annál inkább beszélhetünk „megértésről". Ami pedig a fontosságot illeti, szemben a legfontosabb tény az, ami mindezeket a megfigyeléseket lehetővé tette: az a felfedezés, hogy a tárgy létezik.

Összefoglalásul: 1. Lehetetlenség mereven elhatárolni az egységeket, mert bárhogyan próbáljuk is definiálni őket, határaik mindenképpen átfedik egymást az egységképzés más lehetséges módjaival. Emellett két szomszédos egység demarkációs vonala rendszerint elmosódó és hézagos.

2. Bizonyos szempontból lényegtelen részletek elfedhetik azokat a szabályosságokat, amelyeket ez a bizonyos megközelítési mód feltárhatna.

3. Több, egyazon struktúrára vonatkozó, látszólag összeegyeztethetetlen elmélet egyaránt helyes lehet, ha az összetételt különböző ismérvek szerint ítélik meg.

4. Ennek ellenére az egység meghatározása nélkülözhetetlen a struktúra megértéséhez, mert ez annak a felismerése, hogy milyen szerepet töltenek be a részek az egészben."[9]

A fenti megállapításokat lefordítva a logika nyelvére a következőket mondhatjuk. A kezdetleges kutatási módszerekkel az egész bizonyos elemeinek kiemelésével elért hagyományos logikai ered-

mények is szerves részei lehetnek a mai ismereteknek, ha nem feledkezünk meg arról, hogy ezek bizonyos „műszerekkel", meghatározott távlatból alkotott leképezései az egésznek.

Az egymástól eltérő képet adó különböző logikai rendszerek egyike sem „igazabb" a másiknál. Valamennyi igaz eleme „a logika tömbjének".

A logika különböző fejezeteiben kapott eredményeket nem egymástól elszigetelve, hanem egymással szembesítve, a részek közötti összefüggést szem előtt tartva szolgálhatjuk valóban az ismeretek előrehaladását.

JEGYZETEK

1. A LOGIKA TUDOMÁNYA

[1] A „visszatükrözés" fogalma itt és a továbbiakban filozófiai jelentésben szerepel. A tudati tükrözés specifikumairól Lenin így ír: „A természetnek az emberi gondolatban való tükröződését nem »holtnak«, nem »elvontnak«, nem mozgás nélkülinek, nem ellentétek nélkülinek, hanem az ellentétek mozgása, keletkezése és megoldódása örök folyamatában kell felfogni." *Lenin:* Filozófiai füzetek. Művei. 38. köt. Budapest 1961. 179. old.

[2] Ennek nem mond ellent az a tény, hogy magában a gondolkodási aktusban olyan operációk történnek, melyek feltételezik az ember képességét a formáknak a tartalomtól való elválasztására. A gyermeki gondolkodás fejlődését vizsgálva így ír erről J. Piaget: „Az ítéletet és a fogalmat olyan formák jellemzik, amelyeket el lehet választani tartalmuktól, egészen egy formalizált elmélet megalkotásáig. A gyermek ennek a formalizált elméletnek (a logikának) ismerete nélkül kezd bánni velük mint formákkal, tartalmuktól mind függetlenebbül már a konkrét műveletek (7—8 éves kor) és különösen a formális műveletek (11—12 éves kor) szintjétől kezdve." *J. Piaget:* Tanulás és megismerés. Válogatott tanulmányok. Gondolat 1970. 393. old.

[3] *Marx—Engels:* A német ideológia. Művei. 3. köt. Budapest 1960. 31. old.

[4] Lásd erre példaként az „és", „de", „pedig" nyelvi formák kapcsolatát a konjunkció műveletével. 40. old.

[5] Lásd a „vagy" különböző logikai formáit. 40—44. old.

[6] A logikai kézikönyvek évszázadokon keresztül ezt az elszegényített, idealista, metafizikus filozófiával megfertőzött logikát tartalmazták. Ilyenek még a XIX. század azon logikusainak deduktív logikát ismertető fejezetei is, akik egyébként a logika más területein valóban értékes új eredményekre jutottak (pl. Mill, Sigwart, Lotze). Ilyen továbbá a XX. század elején készült tankönyvek egy része, így pl. a Magyarországon használt logikakönyvek (Pauler Ákosé, Kornis

Gyuláé) is. Sőt, van marxista szerzőtől megjelent logikakönyv is, amely lényegében ezen az alapon ismerteti a hagyományos logikát (pl. *Fogarasi Béla:* Logika. Akadémiai Kiadó 1959).

[7] *D. Hilbert—W. Ackermann:* Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin 1949. 1. old.

[8] A hagyományos logika és a modern logika viszonya nem hasonlítható pl. a ptolemaioszi világkép és a kopernikuszi világkép vagy a mai kémia és az alkímia viszonyához. A ptolemaioszi világképet megdönti a kopernikuszi világkép, az alkímia megállapításait tagadja a mai kémia.

Véleményünk szerint azoknak a logikusoknak van igazuk, akik a modern logikát a régi logika precízebb eszközökkel történő folytatásának tartják. Ezt a nézetet vallja pl. *Clark:* Conventional Logic and Modern Logic. 1952. *Geach:* Reference and Generality 1962. *Kneale:* The Development of Logic Oxford 1962; *N. Kondakov:* Logicseszkij szlovar. Moszkva 1971; *A. Szubbotyin:* Tyeorija szillogisztyiki... Moszkva 1965.; és sokan mások.

[9] N. Resher erről a szétválásról még csak a jövőre vonatkoztatva ír: „Folytonosan növekedő hasadás fog bekövetkezni a matematikai és a filozófiai logika tárgya között. Ezt a szakadékot csak ritka, kivételes képességű és sokoldalú elmék fogják tudni áthidalni. Szilárd meggyőződésem, hogy ez a fejlődés — amelyet nem lehet fatális szerencsétlenségnek tekinteni — valójában hosszabb távon elkerülhetetlen. Ennek hatását nem lehet megelőzni. A legtöbb, amit tehetünk, az, hogy felvértezzük magunkat legsúlyosabb következményeivel szemben. A káros hatások csökkenthetők azáltal, hogy azok, akik felelősek a logika specialistáinak képzéséért és azok, akik a matematikusok képzésével foglalkoznak, biztosítják, hogy a hallgatók — bármilyen oldalon is képzik őket — alapos jártasságra tegyenek szert arra vonatkozóan, hogy hogyan fest a dolog a másik oldalról szemlélve." (*N. Resher:* Topic in Philosophical Logic. Dordrecht — Holland 1968. 4. old.)

Más szerzők azonban a filozófiai és a matematikai logikáról a logika tudományán belül mint a „logika" szó különböző jelentéseiről beszélnek. Így pl. *H. B. Curry* Foundations of Mathematical Logic c. könyvében az alábbi megkülönböztetést adja: 1. A logika mint a gondolkodás analízise és kritikája. Ez a logika *filozófiai logika*, amelynek a tárgya a helyes gondolkodás szabályainak (normáinak) vizsgálata. 2. Matematikai logika. Matematikai módszerek alkalmazása a filozófiai logika tanulmányozásában, vagyis olyan matematikai rendszerek konstruálása, amelyek valamilyen módon kapcsolatban vannak a filozófiai logikával. A logika ebben az értelemben a matematikához tartozik. A matematikai és a filozófiai logika — írja a továbbiakban Curry — nem teljesen szeparálható tárgykörök.

[10] A viszony itt hasonló a generatív nyelvészet és a modern nyelvtanítás viszonyához. Matematikai módszereket alkalmazva a generatív nyelvészet nagy lépéssel járul hozzá a nyelv sajátosságainak megértéséhez. A korszerű nyelvoktatásnak az itt kapott eredményeket ma már fel kell használni. De a

nyelvtanár — bár felhasználja a tanításban a generatív nyelvészetet — az élő, eleven nyelvet akarja megtanítani, nem ennek valamely absztrakciós modelljét. Ezen mit sem változtat az, hogy ő tudatában van, mennyit nyújtottak ezek az absztrakt modellek a nyelv lényegének megértéséhez. Lásd erről részletesen *Anita Pincas:* Transformational Generative and the EFL Teacher. English Language Teaching. Volume XXII. N° 3. Oxford Un. Press 210—220. old.

[11] A külföldi irodalomban tájékozott olvasó tudja, hogy ha vannak is az itt kifejtett pedagógiai szempontokkal ellentétes nézetek, a logikusok jelentős része hasonló nézeteket vall. A néhány évvel ezelőtt készült UNESCO-felmérés anyagából (Varga Tamás volt szíves rendelkezésemre bocsátani), tudjuk, hogy a nyugati egyetemeken még ma is az egyik legnépszerűbb elemi logikakönyv *R. Cohen—E. Nagel:* An Introduction to Logic and Scientifie Method (1934) c. munkája. A könyv szerzői a fentiekhez hasonló pedagógiai elvekből indulnak ki. (Lásd a könyv előszavának IX., X. old.)

Az Egyesült Államokban, Kanadában és több európai országban is rendkívül népszerűek I. M. Copi logikakönyvei. Copi más-más igényeknek megfelelően az „Introduction to Logic" (The Macmillan Company 1961) c. könyv mellett megírta a „Symbolic Logic"-ot (The Macmillan Company 1965) is. Bevezetőnek a matematikai módszereket minimálisan felhasználó „Introduction"-t ajánlja, és csak ez után, felsőbb fokon a klasszikus kijelentés és a predikátumkalkulus anyagát tartalmazó „Symbolic Logic" c. könyvet.

Hasonló a helyzet a Szovjetunióban. Ez tükröződik abban, hogy pl. a moszkvai Lomonoszov egyetemen (1969-es adatok szerint), még a filozófiai szakoktatásban is, a matematikai logikai kalkulusokat tárgyaló kurzust megelőzően a hallgatók ún. általános logikát is tanulnak.

[12] E hegeli vizsgálatnak is van előtörténete. „A régi görög filozófusok — írja Engels — valamennyien született, természetadta dialektikusok voltak, és a legegyetemesebb koponya közöttük, Arisztotelész már vizsgálta a dialektikus gondolkodás leglényegesebb formáit is." *Engels:* A szocializmus fejlődése az utópiától a tudományig. *Marx—Engels* Művei. 19. köt Budapest 1969. 195. old.

[13] *Hegel:* Enciklopédia I. Akadémiai Kiadó 132. old.

[14] *Hegel:* A logika tudománya. Akadémiai Kiadó 1957. 2. old.

[15] Ugyanott, 4 old.

[16] Lásd erről *Engels:* Feuerbach és a klasszikus német filozófia vége. *Marx—Engels* Művei 21. köt. 1970. 256. old.

[17] *Marx—Engels* Művei. 23. köt. Budapest 1967. 20. old.

[18] *Lenin:* Filozófiai füzetek. Művei. 38. köt. 219. old.

[19] Lásd erre vonatkozóan *Engels:* „Marx: A politikai gazdaságtan bírálatához". *Marx—Engels* Művei. 13. köt. 465—466. old.

[20] „Az azonosság tétele ó-metafizikai értelemben véve a régi szemlelet alapveto tétele: $a = a$ Minden dolog onmagával egyenló. Minden maradandó volt, Nap-rendszer, csillagok, szervezetek. Ezt a tételt a természetkutatás minden egyes esetben sorra-rendre megcáfolta, elméletileg azonban még mindig tartja magát és a réginek a hívei még mindig szembeszegezik az újjal egy dolog nem lehet egyidejűleg onmaga és valami más Mindamellett azt a tényt, hogy az igazi konkrét azonosság magában foglalja a kulonbséget, a változást, a természetkutatás újabban részleteiben kimutatta Az elvont azonosság, mint minden metafizikai kategória, elegendo a *házi* használatra, mikor kis arányok vagy rovid időkozok jonnek tekintetbe; a határok, amelyek kozott használható, szinte minden esetre nézve kulonbozők és a tárgy természete szabja meg óket " *Engels:* A természet dialektikája. *Marx—Engels* Művei. 20. kot. 491 old Továbbá: „A dialektikus logika, a régi, pusztán formális logikával ellentétben, nem éri be azzal, hogy — mint amaz — a gondolkodás mozgásának formáit, azaz a kulonbozó ítélet- és kovetkeztetésformákat felsorolja és osszefuggéstelenul egymás mellé állítsa Ellenkezőleg, ezeket a formákat, az egyiket a másikból, levezeti, egymás alá rendeli őket és nem egymás mellé rendezi, a magasabb formákat kifejleszti az alacsonyabbakból " Ugyanott, 497 old.

[21] „Az is már a dialektika termeszetebe valo bepillantás teljes hiánya, ha Duhring úr a dialektikát a puszta bizonyítás szerszámának tartja, ahogy teszem a formális logikát vagy az elemi matematikát lehet korlátolt módon így felfogni. Még a formális logika is mindenekelótt módszer új eredmények fellelésere, az ismerttől az ismeretlenhez való továbbhaladásra, és ugyanez, csak sokkal kiválóbb értelemben, a dialektika is, amely ezenfelul, mert áttori a formális logika szuk látókorét, egy átfogóbb világszemlélet csíráját tartalmazza." *Engels* · Anti-Duhring *Marx—Engels* Művei 20 kot. Budapest 1963. 131. old

[22] A polgári logikairodalomban is találkozhatunk e tény megállapításával Pl. már a múlt század végén találoan fogalmazta meg a formális logika és a dialektika kozotti viszonyt W Minto skót logikus Ő Hegel dialektikájának eredményeit kívánja hasznosítani (lásd 49 old) és ezzel kiszélesíteni a logika teruletét Szerinte semmifele dialektika nem lehetséges a formális logika tételeinek elismerése nélkul „Kovetkezetes bizonyítás, összefuggő érvelés nem lehetséges, amíg nem ismerjuk ezeknek a torvényeknek a kotelező erejét." (40 old) „Azok a logikai folyamatok, amelyeknek a formájára Arisztotelész mutatott rá, csak első állomásai a gondolkodás mozgásának a valóságról alkotott pontos és világos fogalmak eléréséhez Helytelen lenne úgy tekinteni ezeket, mint végső eredményeit ennek az útnak, mint végállomást, ahol a gondolkodásnak meg kell állapodnia " (49 old.) Ez „olyan út, amelyen végig kell menni, ha a kívánt célt el akarjuk érni". (49. old) *V Minto* · Deductiv and Inductiv Logic. 1893

[23] Lásd *Engels* · A szocializmus fejlődése az utópiától a tudományig I. K. 1969 199. old Anti-Dühring I K 26 old A természet dialektikája I kot 486. old Feuerbach és a klasszikus német filozófia vége. I. k. 292 old.

[24] *Lenin:* Karl Marx. Marx—Engels—Marxizmus. 15. old.

[25] *Plehanov:* A marxizmus alapvető kérdései. Népszava, 1947. 55. old.

[26] Lásd ugyanott, 59. old.

[27] Lásd erre vonatkozóan *Lenin:* Filozófiai füzetek. Művei. 38. köt. 350. old.

[28] Érdemes megjegyezni, hogy A. Gramsci is bírálta Plehanovot azért, mert a formális logikát úgy fogta fel, mint a „pangás logikáját" a „mozgás logikájával" szemben. Lásd *A. Gramsci:* Filozófiai írások. Kossuth Könyvkiadó 1970. 119. old.

A magyar marxista filozófiai irodalomban Molnár Erik volt az, aki Plehanov felfogását a formális logika—dialektikus logika viszonyát illetően először bírálta, és rámutatott arra, hogy — Plehanov nézetével ellentétben — „a formális logika a mozgásban, változásban levő világban is érvényes, igaz". *Molnár Erik:* Dialektika. Szikra 1945. 25. old.

[29] Ebben az értékelésben V. Aszmusz alábbi gondolataira támaszkodtam: „E kérdésben Hegelt gyakran félreértették. Sőt, mi több, erre a helytelen értelmezésre nemegyszer az értelmi (formális) logika és a dialektika hegeli értelmezésének teljesen hibás szemlélete épült. Azt, amit Hegel csak a logika egészének »momentumaként« tekintett, azt, ami Hegel szerint csak a gondolati absztrakcióban választható szét, nemegyszer megpróbálták átváltoztatni a gondolkodás és a megismerés egy-egy fokává. Megpróbálták szembeállítani egyiket a másikkal, mint a logika tudományának »alsó« és »felső« fokát. E nézet szerint az »értelmi« vagy »formális« logika a logikum alsó foka, a »dialektikus« (vagy Hegel szavaival, a „negatívan ésszerű") a logikum felső foka. Ami a logikum harmadik »oldalát« illeti — amelyet Hegel »spekulatív«-nak, illetve »pozitívan ésszerű«-nek nevez —, ezt teljesen figyelmen kívül hagyták, mintha a logikum hegeli értelmezésében nem játszana semmiféle szerepet." *V. Aszmusz:* Ucsenyije Gegelja o pravah i pregyelah formalnovo mislenyija. „Voproszi filoszofii", 1970. 8. sz. 28—29. old.

[30] Lásd *G. Havas K:* A logikai viták helyes irányáért. Filozófiai Szemle, 1960. évf. 2. sz. 297—311. old.

[31] A dialektikus logika különböző koncepcióinak ismertetését lásd *N. Kondakov:* Logicseszkij szlovar. Moszkva 1971.

[32] Az említett irányzatok alapján a Szovjetunióban az utóbbi időben több igen értékes könyv látott napvilágot. Így pl. Logicseszkaja struktúra naucsnovo poznanyija. Moszkva 1965. (tanulmánygyűjtemény); *D. Gorszkij:* Problemi obscsej metodologii i gyialektyicseszkoj logiki. Moszkva 1966; *I. Narszkij:* Problema protyivorecsija v gyialektyicseszkoj logike. Moszkva 1969.

[33] Néhány idézetet közlünk a logika felosztásában meglevő különbségek bemutatására: „A »tiszta« jelzővel ellátott »logika« szónak van egy megalapozott értelme: e szerint a logika egyedüli feladata megfogalmazni a dedukció érvényességi szabályait és kodifikálni az ítéletek közötti szükségszerű következ-

tetések sémáit. De van e szónak egy másik, szintén megalapozott, ám szélesebb és nem annyira körülhatárolt értelme is. Ebben a jelentésben a logika feladata, hogy feltárja azoknak a módszereknek és feltevéseknek a struktúráját, amelyeket a megbízható tudás szerzésére a kutatás összes területein használnak." *E. Nagel:* Logic Withouth Metaphisics 1956. 18. old.

„Tanulmányunk tárgya a *logika*, vagy hogy pontosabban szóljunk és ezt a tárgyat megkülönböztessük más elméletektől és tanításoktól, amelyeket (sajnos) szintén e néven neveznek: tárgyunk a *formális logika*.

A (formális) logika a mondatok vagy ítéletek és bizonyítások elemzésével foglalkozik, alapvető figyelmet fordítva a *formára*, eltekintve a *tartalomtól*." *A. Church:* Introduction to Mathematical Logic. 1956. 3. old.

[34] *Marx*. Gazdasági-filozófiai kéziratok 1844-ből. Budapest 1970. 50. old.

[35] Engelsnek a matematikáról írott alábbi sorai a logikával kapcsolatban is érvényesek:

„Akárcsak minden más tudomány, a matematika az emberek *szükségleteiből* származott: a földmérésből és edények űrtartalmának méréséből, időszámításból és mechanikából. De akárcsak a gondolkodás valamennyi területén, a fejlődés egy bizonyos fokán a valóságos világból elvonatkoztatott törvényeket elválasztják a valóságos világtól, vele szembeállítják mint önálló valamit, mint kívülről jövő törvényeket, amelyekhez a világnak igazodnia kell. Így történt ez a társadalomban és az államban, így és nem másként *alkalmazzák* utólag a világra a *tiszta* matematikát, bárha éppen ebből a világból kölcsönözték és a világ összetételi formáinak csak egy részét alkotja — éppen *csakis emiatt* alkalmazható egyáltalában." *Engels:* Anti-Dühring. *Marx—Engels* Művei. 20. köt. 41. old.

[36] *J. S. Mill:* A deduktív és induktív logika rendszere. Franklin 1873. 5. old.

[37] Ugyanott, 17. old.

[38] Hegel e felfogásának elemzését lásd Lukács György: Az igaz és a hamis Hegel ontológiájában I., II. Fil. Szemle, 1971. 1—2.

[39] *B. Russell:* Mysticism and Logic. London 1963. 55. old.

[40] *C. Hempel:* On the Logical Positivist's Theory of Truth. Analyis 1932. 2. köt. 4. sz. Idézi *Svirjov:* Neopozitivizmus és tudomány. Kossuth Könyvkiadó. 1970. 36. old.

[41] *R. Carnap:* The Logical Syntax of Language. 1959. 1. old.

[42] *H. Reichenbach:* Elements of Symbolic Logic. 1947. 2. old.

[43] *R. Carnap:* The Logical Syntax of Language. 1959. 279. old.

[44] *J. T. Clark:* Conventional Logic and Modern Logic. Washington 1952. V. old.

[45] Ugyanott, VI. old.

II. AZ ÍTÉLETEK DURVASZERKEZETÉNEK LOGIKÁJA

[1] „A mondat olyan beszéd, mely kifejez valamit, és amelynek egy kulonválasztott része is jelent valamit mint kifejezés, de nem állítás. Ezt úgy értem, hogy pl. az ember szó kifejez valamit, de nem fejezi ki azt, hogy van, sem azt, hogy nincs, viszont állítás, vagy tagadás lesz, ha hozzáteszunk valamit." *Arisztotelész:* Hermeneutika 4. fejezet Organon, Akadémiai Kiadó 1961. 117. old. (Arisztotelész még nem tett kulonbséget „ítélet" és ennek nyelvi kifejezése „mondat" szavak jelentése közott.)

[2] Részletesebben lásd e konyv „A logikai torvényekről" c. fejezetet

[3] A logikában kísérletek folynak a kérdések, a normák stb. logikájának kidolgozására. Lásd pl. *G. H. von Wright* Norm and Action. London 1963. *Roeser:* Interrogative Logik. *A. Ivin:* Osznovanyija logiki ocenok. Moszkva 1970.

[4] Ez az azonosítás megnyilvánul a szóhasználatban is. Számos logikakonyv ítéletek helyett mondatokról beszél. Szokásos megkulonboztetni az ítéletet logikai értelemben (kijelentés, proposition, Aussage), nyelvtani vonatkozásban (mondat, sentenc, Satz) és pszichológiai értelemben (judgement, Urteil).

[5] Kijelentéskalkuluson (ítéletkalkuluson) a modern logikának azt a fejezetét értjuk, amely az ítéletek durvaszerkezetének logikáját matematikai módszerek alkalmazásával vizsgálja. A kijelentéskalkulus kifejezés szúkebb értelemben is használatos (pl. *P. Novikov:* Elementi matyematyicseszkoj logiki. Moszkva 1959), amikor is a kijelentések logikájának axiomatikus rendszerben történő tárgyalását értik rajta.

[6] Szukséges feltétele valamely x dolog fennállasának az, ami megléte nélkul nem állhat fenn x.

[7] Elégséges feltétele valamely x dolog fennállásának az, ami ha fennáll, nem lehet, hogy x ne álljon fenn, de x fennállása létrejohet más feltétel fennállása esetén is.

[8] A logikai műveletek fent ismertetett jelölései mellett más jelolési módok is használatosak. A leggyakrabban alkalmazott jelölési variációk a kovetkezók: (Találkozhatunk e jelölési módok kulonbozó kombinációival is.)

	Peano—Russell	Łukasiewicz	Hilbert	Scholz
negáció	$\sim p$	Np	$\bar{p}$	$\bar{p}$
diszjunkció	$p \vee q$	Apq	$p \vee q$	$p \vee q$
konjunkció	$p \cdot q$	Kpq	$p\&q$	$p \wedge q$
implikáció	$p \supset q$	Cpq	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$
ekvivalencia	$p \equiv q$	Epq	$p \sim q$	$p \leftrightarrow q$

[9] Az összetett ítéleteket értelmezni lehet a nem kétértékű logikákban is. Példaképpen megemlítjük S. C. Kleene háromértékű logikáját, ahol az „igaz" és „hamis" mellett az ítéletek harmadik lehetséges értéke az „ismeretlen". (Lásd *S.C. Kleene:* Introduction to Mathematics. Amsterdam. Groningen 1952.) Ebben a logikában két ítélet igazságkapcsolatainak lehetősége nem négy, hanem kilenc esetet ad. Ha az „ismeretlen" értéket u (unknown) betűvel jelöljük, az alapműveletek értéktáblázata a következőképpen alakul:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	i	i	i	i
h	i	i	h	i	h
i	h	i	h	h	h
h	h	h	h	i	i
u	i	i	u	i	u
u	h	u	h	u	u
i	u	i	u	u	u
h	u	u	h	i	u
u	u	u	u	u	u

p	$\bar{p}$
i	h
h	i
u	u

[10] Nem feladatunk pl. a „Péter az ötödik emeleten lakik" és „Péter emeletes házban lakik" vagy „Péter sovány" és „Péter kövér" ítéletek közötti függőségi viszony megállapítása. Ugyanis ha a fenti ítéletpárok konkrét tartalmától eltekintünk, akkor nem állapítható meg, hogy függőségi viszonyban állnak egymással.

[11] A „=" jelet itt és a továbbiakban az azonossági viszony jelölésére használjuk.

[12] Számtanban $(3 \cdot 2)+4 \neq (3+4) \cdot (2+4)$. A kijelentéskalkulusban azonban mind a konjunkciók diszkonjunkcióira, mind a diszkonjunkciók konjunkcióira érvényes a disztributivitási törvény.

[13] Engels levele K. Schmidthez 1895. márc 12. *Marx—Engels* Válogatott levelek. Szikra 1950. 563. old.

[14] Lásd *Mc. Caskey E. J.* Minimization of Boolean Functions. The Bell System Technical Yournal, 1956. vol 35. N. 6. Továbbá *Krakovszkaja — Majsztrova*: Ob odnom szposzobe minimizacii normalnih form bulevih funkcij. Formalnaja logika i metodologija nauki. Moszkva 1964.

[15] Lásd erről részletesebben VII. fej. 2.

[16] Lasd e fejezet 9. sz. jegyzetét.

[17] A szillogizmus kifejezést a logikában más tartalommal is használják. Gyakran szillogizmuson csak az arisztotelészi szillogizmust értik és az általunk használt tartalom megjelölésére nem a szillogizmus, hanem a deduktív következtetés elnevezést használják. Ebben az értelemben az érvényes deduktív következtetés azonos a logikailag szükségszerű következtetéssel. Azonban a „deduktív következtetés" terminus használata sem egyértelmű. Néha deduktív következtetésen az általánosabb tételekből a kevésbé általános zárótételhez haladó következtetési folyamatot értik, ezért maradtunk meg a „szillogizmus" kifejezés tágabb értelménél.

III. A FOGALOM

[1] A „Fogalom" fejezet kidolgozásához alapvető forrásmunkaként *E. Vojsvillo:* Ponyatyije. Moszkva 1967. c. könyvét használtam fel.

[2] Lásd *Lenin:* Filozófiai füzetek. Művei. 38. köt. 238. old.

[3] „Osztály" és „halmaz" kifejezéseket azonos jelentésben használjuk. „A logikának azt a részét, amely az osztály fogalmát és ennek sajátosságait

vizsgálja, osztályok elméletének nevezik, ezt az elméletet önálló matematikai diszciplínaként tekintve *általános halmazelméletnek* is nevezik." *Tarski:* Introduction to Logic... 1941. IV. 21. §.

[4] *T. Kotarbiński:* Izbrannije proizvegyenyija. Moszkva 1963. 31. old.

[5] Az „osztály", „halmaz" itt adott meghatározása e fogalom általános halmazelméleti fogalmának felel meg. Ez a halmaz ún. *nem-gyűjtő* fogalma. A halmaz *gyűjtő*-fogalma esetében a halmaz konkrét tárgyak olyan egysége, mint ahogy a láncsor egysége az egyes láncszemeknek. Ebben az értelemben „a halmaz elemének lenni" szinonim „a halmaz részének lenni" kifejezéssel. A halmaz gyűjtőfogalmának használatával kidolgozott elmélet (mereologia) Sz. Lesznyevszki nevéhez fűződik.

[6] *Lenin:* Filozófiai füzetek. Művei. 38. köt. 360—361. old.

[7] Ugyanott.

[8] Ugyanott.

[9] Lásd *Bolzano:* Wissenschaftslehre. Sulzbach 1837.

[10] Lásd *Lenin:* Materializmus és empiriokriticizmus. Művei. 18. köt. Kossuth Könyvkiadó 1964. 130. old.

[11] Egyes logikai munkák megkülönböztetik a felosztást és az osztályozást. A megkülönböztetés azonban nem elég indokolt. Lásd erről bővebben pl. *T. Kotarbiński:* Izbrannije proizvegyenyija. Moszkva 1963. 644. old.

IV. AZ ÍTÉLETEK FINOMSZERKEZETÉNEK LOGIKÁJA

[1] A modern logikai irodalomban J. Łukasiewicz az arisztotelészi logikáról írt munkájában (Aristotle's Sillogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic. Oxford 1957.) kimutatta, hogy maga az arisztotelészi szillogisztika nemcsak formailag, de tartalmilag sem azonos az osztályok elméletével és nem azonos a predikátumok elméletével sem. Az arisztotelészi szillogisztika originális deduktív rendszer, amelynek megvannak a maga sajátos axiómái, sajátos problémái.

[2] Az Arisztotelésznél használt kifejezésnek, mint erre Szalai Sándor rámutatott, pontos nyelvi megfelelője semmilyen más nyelvben nincs meg. A különféle Arisztotelész-fordítások a „hozzá tartozik", „vonatkozik rá" és hasonló

értelmű fordulatokat használják. (Lásd erről Szalai Sándor jegyzetét Arisztotelész Első analitikájához) *Arisztotelész:* Organon. I. Akadémiai Kiadó 1961. 96. old.

[3] „Fogalom szerintem az, amire a tétel felbontható; ilyen az, amit valamiről állítunk, s amiről ezt állítjuk"... *Arisztotelész* Első analitika I. 1, 24 b. 15. Organon I. 3. köt. 193. old.

[4] A „terminus" kifejezést itt és a kategorikus ítéletek tárgyalása során mindig a „fogalom" kifejezéssel azonos jelentésben használjuk. (Lásd erre vonatkozóan Szalai Sándor tanulmányát, Arisztotelész Organon-jához.) *Arisztotelész:* Organon XLVIII-L. old.

[5] Az előzmények sorrendjének nincs elvi jelentősége. Attól, hogy milyen sorrendben vesszük az előzményeket, nem változik meg a kategorikus szillogizmus összetétele. A következtetések elemzésének megkönnyítése érdekében azonban az a szokás alakult ki, hogy elsőnek a nagy premisszát, másodiknak pedig a kis premisszát írják fel. Természetesen a mindennapi, gyakorlati gondolkodási folyamatban nem mindig használunk szabályos sorrendű szillogizmusokat. Ha viszont a következtetéseket logikailag elemezni akarjuk, célszerű a szokásos sorrendben felírni a következtetést. E célból először a zárótételt keressük meg, majd ennek alapján felállíthatjuk a két premisszát.

[6] A versikében csak 19 következtetés szerepel. Ugyanis nem tartalmazza azokat, amelyek részleges ítélet zárótételt adnak ott, ahol egyetemes ítéletre is lehet következtetni. Pl. első alakzatban **A A I, E A O** nem szerepel a versben, mivel szerepelt a náluk erősebb **A A A** és **E A E** következtetés.

[7] Lásd erről V. fej.

[8] *J. Łukasiewicz:* Aristotle's Sillogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic Oxford 1957. 50. old.

[9] Ugyanott.

[10] A boszorkány üres fogalom, ha ismertetőjegyei közé tartozik az, hogy élő személy, térben és időben kiterjedt anyagi test stb. A boszorkány nem üres fogalom, ha ismertetőjegye a fentiekkel ellentétben a következő: a nép képzeletében élő vallási eredetű téveszme. Ez a fogalom természetesen nem azonos sem tartalmában, sem terjedelmében az előzővel. (Csupán a nyelvi kifejezés közös.) Példánkban az elsőként említett boszorkány fogalom szerepel.

[11] Ezenkívül itt megint azzal a ténnyel is szembetalálkozunk, hogy az élő nyelv ugyanazt a nyelvi kifejezést különböző jelentéssel vagy néha nagyobb, néha kisebb terjedelem megjelölésére használja. Ha azt állítja valaki, hogy „a

táskámban levő minden alma piros", akkor e nyelvi forma logikai tartalmába mindenki beleérti, hogy az illető egyén táskájában van alma. Ha ezek után valaki azt állapítja meg, hogy a táskában egyáltalán nincs alma, akkor azt mondja, hogy hamis volt az az állítás, hogy „a táskámban levő minden alma piros". Ezzel ellentétben, ha azt állítja valaki, hogy „minden ember, aki Skoda gépkocsival 160 km óránkénti sebességgel halad, vakmerő ember", akkor ezen állítás igaz voltát senki sem fogja függővé tenni attól, hogy létezik-e egyáltalán olyan ember, aki Skoda gépkocsival óránként 160 km sebességgel halad.

Azt mondhatnánk, az ember a gyakorlati gondolkodásban az ítéletekben szereplő fogalmak alapján dönti el, hogy az ítélet állít-e létezést vagy sem. Legtöbb esetben nem is származnak ebből félreértések. Bár származhatnak. Például. „Minden holnapra feladott leckém készen van" — mondja Pista, a

kisdiák. Hazudsz — mondja a húga, nem csináltál semmi leckét! Mielőtt hazugsággal vádolsz, kérdezd meg, volt-e egyáltalán leckém — válaszol Pisti". Annak eldöntése, hogy melyik gyereknek van igaza, csak akkor lehetséges, ha megállapodunk abban, hogy volt, vagy nem volt Pistinél létezést feltételező értelme a „Minden holnapra feladott leckém készen van" ítéletnek.

[12] Az osztálylogikában lehetőség van összetett fogalmakat tartalmazó ítéletek és következtetések elemzésére is. Lásd erről 234. old.

[13] *S. Luszczewska—Rohmanowa:* Analiza i nogólnience metody sprawdzania formul logicznych przy pomocy diagramow Venna. Studia Logica I. 1953. A szerzők először használnak Venn-diagramot a négyterminusos következtetések igazolására.

[14] A predikátumkalkulus a matematikai logika azon fejezete, amely az ítéletek finomszerkezetén alapuló következtetések elméletét adja. A predikátumkalkulus elnevezést — hasonlóan a kijelentéskalkulus névhez (lásd II. fej. 5. jegyzet) tágabb és szűkebb terjedelem megjelölésére is használják. A továbbiakban azonos jelentésben használjuk a predikátumok logikája és a predikátumkalkulus kifejezéseket.

[15] Ha az értelmezési tartomány tetszőleges $\mathcal{J}$ halmaz, az értelmezési tartomány jelölése rendszerint elmarad. A továbbiakban tehát: $\forall_{(x)} = \forall_{(x)Y}$

[16] A „[ ]" zárójelet nem feltétlenül kell kitenni, mert használata nélkül sem félreérthető a kifejezés értelme.

[17] A következtetések elemzésének e téren kidolgozott módszereit nem ismertetjük. Meg kell elégednünk az eredmények puszta felsorolásával.

[18] Az ítéletkalkulusban az ún. táblázatos módszer és a normálformára vezetés módszere olyan eljárások, amelyek — mint ezt láttuk — alkalmasak arra, hogy véges, előre meghatározható muveleti lépések folyamatában bármely ítéletkalkulusbeli formuláról eldontsük, mindig-igaz-e, tehát érvényes kovetkeztetésmódnak megfelelő formula-e vagy sem Mivel az ítéletkalkulusban van olyan módszer, amellyel az ítéletkalkulus formuláiról el tudjuk donteni, mindig-igaz-e, ezért *az eldontésprobléma az ítéletkalkuluson belul megoldott.*

[19] A Church-féle hipotézissel, valamint az ebből levonható filozófiai kovetkeztetésekkel szemben nagy érdemű, úttorő munkát végzett Kalmár László akadémikus. A kovetkezőkben az ó gondolatait ismertetjuk

V. A DEDUKTÍV RENDSZEREKRŐL

[1] Lásd 106. old.

[2] A bizonyításokban és a cáfolatokban előforduló osszes hibákat *szofizmákra* és *paralogizmusokra* osztják fel A szofizma a bizonyítás szabályainak szándékos megsértése abból a célból, hogy egyik vagy másik hamis tétel bizonyításának (vagy igaz tételek megcáfolásának) látszatát keltsék A paralogizmus a logikai kovetelmények akaratlan megsértése Bármely hiba, legyen akár szándékos, akár akaratlan, a logika kovetelményeinek megsertését eredményezi

[3] Idézi *Kotarbinski:* Izbrannije proizvegyenyija. Moszkva 1963. 553 old

[4] Az írott nagybetűk nem tartoznak jelrendszerunkbe, csupán jelrendszerunk ismertetését segítik. Formulák megjelolésére használjuk őket

[5] Így pl. a matematikában a racionális számok aritmetikája axiómarendszerének ellentmondásmentességét bizonyítani lehet a természetes számok aritmetikája axiómarendszerének felhasználásával.

[6] A predikátumkalkulus teljességét — vagyis, hogy axiómáiból levezethető az osszes predikátumkalkulusbeli mindig-igaz formula — K. Godel mutatta ki Godelnek erre vonatkozó megállapítását Godel-féle teljességi tételnek nevezik

VI. A REDUKTÍV KÖVETKEZTETÉSEK

[1] Lásd *R. Carnap:* Logical Foundations of Probability, Chicago 1950, *Reichenbach:* Theory of Probability.

[2] *Marx*: A tőke Előszó az első kiadáshoz *Marx—Engels* Művei. 23. kot. 6. old.

[1] „Minthogy a gondolkodás folyamata maga is a viszonyokból nő ki, maga is *természeti folyamat*, a valóban megértő gondolkodás mindig csak ugyanaz lehet és csak fokozatilag különbözhetik a fejlődés érettsége, tehát a gondolkodás szervének érettsége szerint is. Minden más badarság." Marx levele L. Kugelmannhoz. 1868. júl. 11. Válogatott levelek. Szikra 1950. 243. old.

[2] *Arisztotelész:* Metafizika 1006/b.

[3] Az azonosság törvényéről, a dialektika törvényeihez való viszonyáról lásd részletesebben: *G. Havas;* Az azonosság törvénye a hagyományos és a modern formális logikában. Akadémiai Kiadó 1964.

[4] *Arisztotelész:* Metafizika 1005/b.

[5] Ilyen felfogással a mai logikai irodalomban már csak elvétve találkozhatunk, de az elmúlt években a dialektika és a formális logika közötti viszony helytelen értelmezése a magyar logikairodalomban is számos munkában jelentkezett. Mivel e nézetek hazánkban még nem részesültek kellő kritikában, ezért szükséges, hogy a továbbiakban foglalkozzunk e nézetek bírálatával.

[6] A. Zinovjev e problémával kapcsolatban a következőket írja: „Mindenekelőtt meg kell különböztetnünk a kétértékűség elvét, amely abban áll, hogy két és csakis két egymást kölcsönösen kizáró igazságértéket enged meg, és azt az állítást, hogy »X vagy nem-X«, ahol X tetszőleges kijelentés. Csupán a kétértékű logika szintjén ezt a megkülönböztetést általában vagy meg sem teszik, vagy lényegtelennek tartják, mert itt ezek az állítások így vagy úgy egybeesnek. A többértékű logika szintjén különbségük teljesen nyilvánvalóvá lesz, ami egyben annak a példája, hogy a többértékű logikára való áttérés jóval finomabb elemzést tesz lehetővé magában a kétértékű logikában is.

Valóban, a többértékűség elve annak megengedését jelenti, hogy az egymást kölcsönösen kizáró igazságértékek száma kettőnél nagyobb lehet. Ilyen feltevést már nem írhatunk le az »X vagy nem-X«-hez hasonló állítással. Itt a következő állítást kell használnunk: »$v|X| = t^1$, vagy $v|X| = t^2$, vagy ...«, ahol $v|X| = t^i$-t úgy olvassuk, hogy »X-nek t^i igazságértéke van«. Ekkor is érvényes lesz minden igazságértékre az az állítás, hogy »$v|X| = t^i$ vagy $v|X| \neq t^i$«, illetve »X-nek t^i értéke van, vagy X-nek nincs t^i értéke«. Ha Y-nal jelöljük az »X-nek t^i értéke van« állítást, akkor azt kapjuk, hogy »Y vagy nem-Y«, azaz annak az állításnak egy alesetét, amit a paragrafus elején említettünk." *A. Zinovjev:* A logikai következményfogalom és a többértékű logikák. Akadémiai Kiadó 1968. 109. old.

[7] E nézet különböző logikai-filozófiai koncepcióval forrhat össze. Azok, akik szerint (lásd pl. *P. Destouches—Février:* La structure des théories phy-

siques. Paris 1951.) a logika lét-elmélet, amely a világ általános sajátosságait tükrözi, azzal érvelnek, hogy magának a mikrovilágnak a sajátosságai eltérők a makrovilágtól, és ezért más törvények lesznek igazak itt és mások a makrovilágban. Azok, akik a logikát lényegében tudományos nyelvnek tartják (lásd pl. *A. Reichenbach:* Philosophic Foundations of Quantum Mechanics. Berkeley—Los Angeles, 1946) azt állítják, hogy a mikrovilág tanulmányozásához nyelvet kell változtatni, más szavakat és más definíciókat kell adni.

[8] Ilyen felfogásban írt figyelemre méltó tanulmányt Hilary Putnam. Lásd *H. Putnam:* Is Logic Empirical? Boston Studies in the Philosophy of Science Volume V. Dordrecht-Holland 1969.

[9] *Selye János:* Álomtól a felfedezésig. Akadémiai Kiadó 1967. 351—354. old.

NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ

A
abszorbciós azonosságok 65
absztrakt fogalom 165
absztrakt tárgy 157
Ackermann, W. 19
affirmo 195
alany 191, 194
alapfogalom 260
alap megelőzése 267
alapvető tévedés 266
alárendelt ellentétes ítéletek 58, 203
alárendelt ítélet 58, 203
állítás 35
állítmány 191, 194
általános fogalom 162
analogikus következtetés 286
antecedens 45
antinómia 161
áramkörök logikája 128, 275
Arisztotelész 13—15, 18, 20, 30, 191, 192, 216, 263, 264, 280, 290, 291, 299
aritmetikai azonosságok 62
asszociativitás 63
aszimmetrikus reláció 236
Aszmusz, V. 312
„A" típusú ítélet 195
azonos ítélet 58
azonosság törvény 290
  a dolgok azonosságának törvénye 291
  a formális logika azonosság törvénye 292
  megsértése 294
  metafizikus értelmezése 293, 31
azonosságok 62, 120
azonosság viszonya 60
axióma 260, 272

B
Bacon, F. 15
„Barbara" módozat 212
behelyettesítési szabály 272, 274
bennfoglalás viszonya 150
bizonyítás 90, 259, 263
  direkt 263
  ellenkezőjével 106, 264, 299
  folyamata 260
  formája 261
  hibái 265
  indirekt 16, 264
Bloomfield, A. 32
Bolzano, B. 170
Bolyai, J. 16, 17, 302
Boole, G. 16, 62
Brouwer, L. E. 31, 301

C
cáfolat 90, 263
  direkt 265
  indirekt 265
Carnap, R. 21, 31, 32
Church, A. 256, 313
Cohen, M. R. 310

Copi, I. M. 310
Curry, H. B. 309

D
deduktív következtetés 27, 281, 316
deduktív rendszer 268
  axiomatikus 268
  axiomatikus-formális deduktív 268
De-Morgan, A. 16
De-Morgan azonosságok 65
denotátum 20, 181
deszkriptív terminus 143
dialektika 24, 293, 297, 321
dialektikus logika 22, 25, 27, 311
  hegeli 25, 311
dilemmás következtetés 98, 99
  egyszerű bontó 99
  egyszerű építő 99
  összetett bontó 99
  összetett építő 99
diszjunkció 42, 70, 129
diszjunktív normálforma 54, 72, 87
  kitüntetett 79, 87
  rövidített 82
disztributivitás 63, 316

E
egyedi fogalom 163
egyedi ítélet 221
egyedi terminus 163
egyetemes ítélet 195
  állító 195
  tagadó 195
egyesítő ítélet 40, 41
egyszerű ítélet 36, 191
Ehrenfeszt, P. 128
ekvivalencia 48
ekvivalens fogalmak 167
ekvivalens ítéletek 205
eldöntésprobléma 255—258, 277, 320
elégséges feltétel 46, 314
elemi ítélet 38
ellentétes fogalmak 174
ellentétes ítéletek 58, 203
ellentmondási viszony
  fogalmak 174
  ítéletek 58, 204
ellentmondásmentes rendszer 275
ellentmondásmentesség 276—278
ellentmondás törvénye 294
  megsértése 295
  metafizikus felfogása 296, 297
ellentmondó ítéletek 58, 203
előtag 45
Engels 24, 71, 310
értékkészlet 240
értelmezési tartomány 240
érvek 259—261
  túl sokat bizonyító érv 267
érvényes következtetés 103, 125—128, 132
„E" típusú ítélet 195
Euler-körök 196
explicit definíció 180

F
fajfogalom 168
felosztás 187
  és osztályozás 187, 317
  szabályai 188
feltételes-szétválasztó szillogizmus 98
feltételes szillogizmus 92—95, 98, 99—101
  állító módozat 92
  tagadó módozat 93
filozófia és logika 22, 32, 33
filozófiai logika 21, 28, 309
fogalmak közötti viszonyok 166, 176, 177
fogalom 10, 142—144, 155, 318
  általános használatának törvénye 293
  és nyelvi kifejezés 143
  felcserélésének hibája 266, 294
  tartalma 146—149
  terjedelme 149, 156

Fogarasi, B. 309
forma
  és tartalom 9
  logikai 8, 9, 12, 19, 28, 70
  nyelvi 12
formális logika 22, 27, 177, 311, 313, 321
formalizmus 157, 158
formula 38
fölérendelt ítélet 58, 203
Frege, G. 20, 21, 269
függetlenség 276
függetlenségi viszony 58
független változó 239
függő változó 239
függőségi viszony 58, 316
függvény 240
  logikai 239, 240

G
Geach, P. T. 309
Gödel, K. 278, 279, 320
Gorszkij, D. 312
Gramsci, A. 312

H
„Ha-akkor" típusú ítélet 44
hagyományos logika 18, 20, 27, 38, 309
halmaz 316
hamis 11, 35
Hegel, G. W. F. 22, 25, 164, 311, 312
helyes, logikailag 10, 11
Hempel, C. 30
hibás kör 267
Hilbert, D. 16, 19, 31
hipotézis 257, 280
Hispanus, P. 14
homályos meghatározás 185

I
idempotencia azonosságok 63
igaz 10, 11
igazság 10, 11, 35
  logikai 85
igazságérték 35
implicit definíció 181
implikáció 44—48, 70, 125
impredikábilis fogalom 160, 161
induktív következtetés 281
  egyszerű felsoroláson alapuló 284
  kvalitatív 285
  kvantitatív 285
  matematikai 284
  szűkebb fogalma 282
  teljes 283
interpretálás 272
intranzitív reláció 237
ismertetőjegy 145
ítélet 10
  durvaszerkezetének logikája 34, 46
  és fogalom 34, 89
  és mondat 36
  finomszerkezetének logikája 191
ítéletek közötti viszonyok 57, 58
„I" típusú ítélet 195

K
kalkulus 19, 20
Kalmár, L. 320
Kant, I. 29, 164
kategória 260
  szemantikai 143
kategorikus ítélet 191, 192, 235
  átalakítása 201
  Bool értelmezése 227
  megfordítása 199
kategorikus ítéletek közötti viszonyok 203, 204
kategorikus szillogizmus 14, 207, 208, 221
  alakzatai 211
  axiómája 208
  módozatai 211
  szabályai 212
  szerkezete 209
keresztezési viszony 171
kiegészítő osztály 150
kielégíthető formula 85

kifejezési azonosságok 66
kijelentés 314
kijelentések logikája 34
kijelentéskalkulus 38, 314
  szemantikai rendszere 273
  szintaktikai rendszere 270
kiszámítási azonosságok 64
kizárás 42, 43
kizáróan vagylagos ítélet 44
kizáró diszjunkció 44
Kizárt harmadik törvénye 299
Kleene, S. C 315
Kneale, W. C 309
kommutativitás 62
Kondakov, N. 309, 312
konjunkció 40, 41, 70, 129
konjunktív normálforma 75, 86
  kituntetett 80, 86, 88
  rovidített 80
konklúzió 90
konkrét fogalom 165
kontextuális definíció 180
kontrapozíciós kovetkeztetes 94
konzekvens 45
Kotarbinski, T. 21, 157
korbenforgó bizonyítás 267
  meghatározás 184
kotott változó 242
kovetkezmény 90, 132
kovetkeztetés 89, 90
  előzményei 90
  érvényformulája 105
  logikailag szukségszerű 91
  szillogisztikus (ld szillogisztikus kovetkeztetes)
  valószínűségi 28
kovetkeztetési szabályok 272
kozvetlen kovetkeztetés 205
kvantifikálás 241
  általános kvantifikáció 242
  egzisztenciális kvantifikáció 243
kvantor 242

L
Leibniz, G W. 15, 16, 20, 62, 269
Lenin 24, 25, 161, 183, 308
leválasztási szabály 272, 274
levezetési szabály 274
Lewis, C. J. 47
Lobacsevszkij 16, 17, 302
Locke J. 29
logicizmus 157
logika 7—12, 22, 27, 28, 289
  arisztotelészi 14, 15, 192, 219
  hegeli 24, 30
  filozófiája 28
  intuicionista 31
  kétértékű 35, 85, 301
  nem klasszikus 47
  neopozitivista 30
  ontológiai felfogása 30
  pszichologista 29
  tobbértékű 35, 85
  tudománya 8, 13
  skolasztikus 14, 20
  spekulatív 23
logikai művelet 8—12, 19, 38, 299
logikai pozitivizmus 142
logikai szemantika 20, 21, 27
logikai szintakszis 31
Lukács, Gy. 313
Lukasiewicz, J. 218, 317

M
Marx 24, 28, 285
matematikai logika 15—22, 38, 277, 309
  szúk értelemben 21
megengedően vagylagos ítélet 42
meghatározandó 182
meghatározás 179, 186
  genetikus 182
  nem és faj alapján történő 182
  nominális 179
  reális 181
  szabályai 183
meghatározó 182
mellérendeltségi viszony 173
metafizikus módszer 24
metalogikai kijelentések 259

metarendszer 276
metodologika 20, 27, 259
metszet 151
Mill, J. S 29
mindig hamis ítélet 85
mindig igaz ítélet 85, 274, 301
Minto, W 311
modell 287
modern logika 19, 20, 277, 309
modus ponendo tollens 96
modus ponens 92
modus tollendo ponens 95
modus tollens 93
mondat és ítélet 36, 37
Morris, W 21

N
Nagel, E 310, 313
Narszkij, I. 312
negáció 39
negációs azonosságok 64
nemfogalom 168
nem-szimmetrikus reláció 236
nem-tranzitiv reláció 237
nominalizmus 157
non sequitor 268
Novikov, P 314

Ny
nyelv 12
  és logika 12
  szabályai 13
  szimbolikus 14
  természetes 13, 250
nyelvi szinonima 168
nyitott formula 240

O
Occam, U. 14
osztály 149, 158, 159, 316, 317
  eleme 149
  kiinduló 149
  reszosztály 149
osztályok
  egyesítése 152
  kulonbsége 151
  metszete 151
osztályokkal vegzett logikai műveletek 150
„O" típusú ítélet 196
osszeegyeztethetetlenségi viszony 171
osszetett fogalom 155, 156
osszetett ítélet 36—38
  lehetséges fajtái 49

P
paralogizmus 320
párhuzamos kapcsolás 129
Peano, G 16
Piaget, J. 308
Pincas, A 310
Plehanov, G. 24, 25, 312
Poreckij, P. 16
pozitivizmus 31—33
predikábilis fogalom 160, 161
predikátor 143, 144
predikátum 240
  egyváltozós 241, 254
  tobbváltozós 241, 254
predikátumkalkulus 239, 254, 319
predikátumok logikája 234
premissza 90
  kis 210
  nagy 210
Putnam H 322

Q
Quine, W. O. 33

R
reduktív kovetkeztetés 280
  fajtái 280
realizmus 157
Reichenbach, H. 32
rekurzív definíció 181
reláció 236
relációs ítélet 234, 235
rendszer
  axiomatikus 216
  logikai 13, 72, 229, 290, 304
  nyelvi 13, 31

Rescher, N. 309
részleges ítélet 195
  állító 195
  tagadó 195
részosztály 149
  nem valódi 150
Russell B. 16, 30, 273

S
Schroeder, E. 16, 21
Selye, J. 304
sem-sem formájú ítélet 51
Sesztakov, V. 128
Shannon, C. E. 128
sorbakapcsolás 129

SZ
Szalai, S. 317
szemantikai definíció 180
szemantikai rendszer 270, 273
személyre szóló érvelés 266
szétválasztó ítélet 41
szétválasztó szillogizmus 95, 98—101
  állítva tagadó módozat 96
  tagadva állító módozat 95
szigorú implikáció 47
szillogisztikus következtetés 91, 282, 316
  arisztotelészi 20, 218, 223, 317
szimbolikus logika 18, 19
szimmetrikus reláció 236
szintaktikai definíció 180
szintaktikai rendszer 270, 273
szofizma 320
Szubbotyin, A. 309
szükséges feltétel 46, 314

T
tagadás 39, 40
Tarski, A. 21
tartalom és terjedelem fordított viszonyának törvénye 168
tautologia 50
tautologikus ítélet 50
táblázatos eljárás 103, 320
  rövidített alkalmazása 106
teljesség 276
terminus 194, 318
  elosztott 198
  középső 210
  logikai 143
  szélső 210
tétel 271, 272
tézis 259
  felcserélése 266
  mellőzése 266
tisztán feltételes szillogizmus 95
törvény logikai 28, 30, 289
  alaptörvény 289
  gondolkodás törvény 7, 8, 70
  logikai rendszer törvénye 290, 300, 301
  metalogikai 290
traduktív következtetés 282
tranzitív reláció 236
tudomány
  deduktív 260
  induktív 260
túl szűk meghatározás 184
túl tág meghatározás 184

U
ugrás a felosztásban 189
univerzum 149
üres fogalom 163, 164, 318
üres osztály 149
utótag 45

V
Venn-diagram (kör) 150
Vojsvillo, E. 316

W
Whitehead, A. N. 273
Wright, G. H. 314

Z
zárótétel 90
zárt formula 242
Zinovjev, A. 321

TARTALOM

Előszó 5

I. A logika tudományának tárgya 7

1. Mi a logika tárgya? 7
2. Gondolkodás és nyelv 12
3. Hagyományos és modern logika 14
4. Formális logika és dialektika. Dialektikus logika 22
5. Különböző nézetek a logika tárgyáról 28

II. Az ítéletek durvaszerkezetének logikája 34

1. Az ítéletekből összetett ítéletek 34
   1.1. Az ítéletekről általában. Ítélet és mondat 34
   1.2. Az összetett ítéletek jellemzése 37
   1.3. Az összetett ítéletek összes lehetséges fajtáiról 49
   1.4. Az ítéletek közötti viszonyok 57
   1.5. Azonosságok 62
   1.6. Az ítéletfajták absztraktságáról és viszonylagosságáról 69
   1.7. Az összetett ítéletek normálformára vezetése 72
   1.8. Mindig-igaz, mindig-hamis, kielégíthető formulák 84
2. Az ítéletek durvaszerkezetén alapuló következtetések 89
   2.1. A következtetések általános jellemzése 89
   2.2. A feltételes és a szétválasztó szillogizmusok 92
   2.3. Következtetések érvényességének vizsgálata táblázatos módszerrel 103
   2.4. Következmények levonása táblázatos módszerrel 110
   2.5. Következtetések érvényességének eldöntése normálformára vezetéssel 116

2.6. Következmények levonása azonosságok felhasználásával 120
2.7. A következményfogalomról 125
3. Az áramkörök logikája 128

III. A fogalom 142

1. Fogalom és nyelv kapcsolata 143
1.1. Fogalom és nyelvi kifejezés 143
2. A fogalom logikai szerkezete 144
2.1. A fogalom tartalma és terjedelme 144
2.2. Az osztályokkal végzett műveletek 150
2.3. Összetett fogalmak képzése 155
2.4. Az absztrakt tárgyakról 157
2.5. Predikábilis és impredikábilis fogalmak 159
3. A fogalmak fajtái 162
3.1. Általános, egyedi és üres fogalmak 162
3.2. Konkrét és absztrakt fogalmak 165
4. A fogalmak közötti viszonyok 166
5. A meghatározás 179
5.1 A nominális meghatározás 179
5.2. A reális meghatározás 181
5.3. A nem és faj alapján történő meghatározás 182
5.4. A meghatározás szabályai 183
6. A felosztás 187

IV. Az ítéletek finomszerkezetének logikája 191

1. Az arisztotelészi szillogisztika 191
1.1. A kategorikus ítélet 191
1.2. A kategorikus ítéletek közötti viszonyok 203
1.3. Közvetlen következtetések kategorikus ítéletekkel 205
1.4. A kategorikus szillogizmus 207
1.5. Az arisztotelészi szillogisztika és az iskolás hagyományos logika torzításai 218
2. Ítéletek és következtetések formalizálása az osztály-logika eszközeivel 223
2.1. S—P szerkezetű ítéletek üres osztályok lehetőségének feltételezésével 223

2.2. A kategorikus szillogizmus elemzése, értelmének kiterjesztése az osztály-logikában ... 229
3. A predikátumok logikája ... 234
3.1. Relációs ítéletek ... 235
3.2. Az egyszerű ítéletek formalizálása a predikátumkalkulusban ... 239
3.3. Következtetések elemzése a predikátumkalkulusban ... 254
3.4. Az eldöntésprobléma ismeretelméleti jelentősége ... 256

V. A deduktív rendszerekről ... 259

1. A bizonyítás ... 259
1.1. Tézis és érvek ... 259
1.2. A bizonyítás fajtái ... 263
1.3. A bizonyításokban előforduló hibák ... 265
2. Az axiomatikus-formalizált rendszerek ... 268
2.1. A szintaktikai rendszerek ... 270
2.2. Szemantikai rendszerek ... 273
3. A deduktív axiómarendszerek tulajdonságai. Az ellentmondásmentesség ... 275
4. Logikai rendszerek axiomatikus felépítésének szerepe a tudományos kutatásban ... 277

VI. A reduktív következtetések ... 280

1. A reduktív következtetések fajtái ... 280
2. Az induktív következtetés ... 283
2.1. A teljes indukció ... 283
2.2. A nem-teljes indukció ... 284
3. Az analogikus következtetés ... 286

VII. A logikai törvényekről ... 289

1. A formális logika alaptörvényei és viszonyuk a dialektikus gondolkodáshoz ... 289
1.1. Az azonosság törvénye ... 290

1.2. Az ellentmondás törvénye 294
1.3. A kizárt harmadik törvénye 299
2. A logikai rendszerek törvényei 300

Jegyzetek 309

Név- és tárgymutató 325

A kiadásért felel a Kossuth Könyvkiadó igazgatója. Szerkesztette Tomori Lajos
A borító és a kötésterv Nagy Béla munkája. Műszaki vezető Szécsi Andor
Műszaki szerkesztő Székffy Gyula. A szedést 1972. V. 30-án kezdték meg
Megjelent 1973. V. 15-én, 4000 példányban
Terjedelme 21 (A/5) iv. PL — 123 — K — 7274
73/2659. Franklin Nyomda, Budapest
Felelős: Vértes Ferenc